выпускной

ЭКЗАМЕН

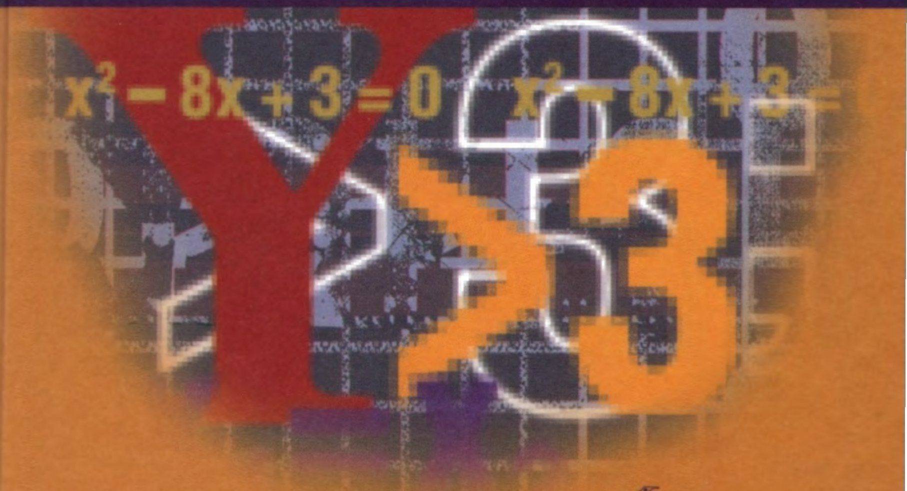
вступительный

МАТЕМАТИКА

Э. С. Беляева, А. С. Потапов,
С. А. Титоренко

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

Часть 2



дрофа

выпускной ЭКЗАМЕН вступительный

МАТЕМАТИКА

Э. С. Беляева, А. С. Потапов,
С. А. Титоренко

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

Часть 2

Учебное пособие

Москва

дрофа

2009

УДК 512.1(075.8)
ББК 22.141я73
Б44

Серия основана в 2007 году

Беляева, Э. С.

Б44 Математика. Уравнения и неравенства с параметром. В 2 ч. Ч. 2 : учебное пособие / Э. С. Беляева, А. С. Потапов, С. А. Титоренко. — М. : Дрофа, 2009. — 444, [4] с. — (Выпускной/вступительный экзамен).

ISBN 978-5-358-02063-4 (ч. 2)
ISBN 978-5-358-02064-1

Учебный комплект (сборник задач в двух частях с электронным приложением на CD-ROM) в полном объеме раскрывает тему «Уравнения и неравенства с параметром». В части 2 разбираются показательные, логарифмические и иррациональные уравнения и неравенства с параметром. Детально рассмотрен широкий спектр задач разных уровней сложности, доступно и наглядно изложены методы решения.

Комплект станет незаменимым помощником не только для учеников, но и для учителей.

Для учащихся старших классов, преподавателей математики, абитуриентов, студентов математических специальностей.

УДК 512.1(075.8)
ББК 22.141я73

ISBN 978-5-358-02063-4 (ч. 2)
ISBN 978-5-358-02064-1

Предисловие

Вы держите в руках вторую часть двухтомника «Уравнения и неравенства с параметром», представляющего собой *обучающий сборник задач* широкого диапазона применения.

Задания с параметром предлагаются на выпускных экзаменах по алгебре и началам анализа в средней школе, на вступительных экзаменах по математике почти во всех вузах, входят в материалы ЕГЭ по математике, причем многие из них достаточно высокого уровня сложности.

Очень часто абитуриенты оказываются не подготовленными к «встрече с параметром». Одна из основных причин — отсутствие доступной учебно-методической литературы, что определяет актуальность данного издания.

Двухтомник предназначен:

— абитуриентам для подготовки и самоподготовки к вступительным экзаменам по математике в вузы, в том числе и к сдаче ЕГЭ;

— учащимся общеобразовательных школ разного уровня математической подготовки начиная с 7 класса;

— учащимся предпрофильных и профильных классов и школ;

— преподавателям и учащимся подготовительных курсов для подготовки к поступлению в вузы;

— студентам педвузов по специальности «математика» при изучении курсов элементарной математики и методики преподавания математики, а также для написания выпускных квалификационных работ;

— институтам повышения квалификации и переподготовки работников образования;

— учителям, ведущим элективные курсы.

Вы получаете умные и полезные методические пособия, по которым можно не только учиться, но и учить.

Материалы книг прошли многолетнюю апробацию в учебных заведениях различных типов. Использующие их учителя отмечают, что школьники перестали бояться параметра и успешно справляются с разноуровневыми заданиями.

Первая часть состоит из трех разделов: 1) «Линейные уравнения и неравенства с параметром и к ним сводимые»; 2) «Квадратные уравнения и неравенства с параметром и к ним сводимые»; 3) «Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром».

Вторая книга содержит следующий материал: 1) «Иррациональные уравнения и неравенства с параметром»; 2) «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства с параметром».

В ней продолжается реализация разработанного авторами единого методического подхода к решению уравнений и неравенств с параметром, аналога которому нет в имеющейся литературе:

— даны четкие определения основных понятий, которые внесли ясность в существующую путаницу их трактовки;

— упражнения классифицированы по видам функций в соответствии с программой по математике СОШ;

— система упражнений тщательно продумана и отвечает основным дидактическим принципам: доступности, последовательности, наглядности, научности и другим;

— пособия написаны научно-популярным и в то же время логично-доказательным языком;

— впервые систематически используется координатная прямая параметра, которая позволяет геометрически иллюстрировать процесс решения задачи и снять проблему записи ответа;

— несомненным достоинством, позволяющим интегрировать наглядно-образное и абстрактно-логическое мышление является активное использование различных систем координат, как для решения задач с параметром, так и для иллюстрации полученных результатов;

— рассмотрение задач с параметром предваряет справочный материал теоретического характера по соответствующей теме, в котором особое внимание уделяется вопросам, недостаточно изложенным в школьном курсе математики;

— значительная часть упражнений решается различными методами;

— в задачный материал включен ряд заданий, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике в ведущих вузах, а также на ЕГЭ в группе С (2001—2005 гг.), требующих оригинальных подходов с обоснованием. Образцы решения таких упражнений с параметром показывают эффективность разработанной авторами методики;

— каждый раздел начинается с подготовительных упражнений, как правило, разработанных авторами, которые служат «переходными мостиками» к решению более сложных заданий. После разбора базисных задач, расположенных в определенной последовательности, предлагается для закрепления решить ряд упражнений самостоятельно. Условия некоторых более сложных уравнений и неравенств заимствованы из книг, указанных в приведенном списке литературы, а также из материалов ЕГЭ по математике.

Остановимся подробнее на особенностях данного пособия.

Темы «Тождественные преобразования иррациональных выражений», «Иррациональные уравнения и неравенства» являются одними из наиболее трудных разделов курса элементарной математики. Поэтому в пособие включен значительный как по содержанию, так и по объему справочный материал: свойства радикалов, их использование в тождественных преобразованиях иррациональных выражений; теория равносильности уравнений (неравенств) на множестве; основные методы решения иррациональных уравнений, неравенств и их систем.

Изучение показательных и логарифмических уравнений и неравенств с параметром также начинается с анализа справочной информации. При этом особое внимание обращается на свойства логарифмов, свойства и графики показательной и логарифмической функций, теорию равносильности уравнений и неравенств на множестве.

Умение детализировать область значений показательной и логарифмической функций поможет решить некоторые из заданий наиболее рациональным способом.

Данное пособие будет полезно и интересно как математикам, так и гуманитариям и позволит оценить красоту, эстетику и интеллектуальную глубину приведенных в них задач.

Желаем успехов на пути постижения тайн и глубин параметра!

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

1. Справочный материал

1.1. Степени и корни

▶ ***Определение 1.*** Под a^n, где $n \in \mathrm{N}$, $n > 1$, $a \in \mathrm{R}$, понимается произведение n сомножителей, каждый из которых равен a.

▶ ***Определение 2.*** $a^1 = a$, $a \in \mathrm{R}$.

▶ ***Определение 3.*** $a^0 = 1$, где $a \neq 0$.

▶ ***Определение 4.*** Если $a > 0$, $n \in \mathrm{N}$, $n > 1$, $m \in \mathrm{Z}$, то $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

Напомним, что N — множество натуральных чисел, R — множество действительных чисел, Z — множество целых чисел, Q — множество рациональных чисел.

Замечание. Если $m \in \mathrm{N}$, $n \in \mathrm{N}$, то $a \geqslant 0$. Обратим особое внимание на важность условия $a > 0$ в определении 4. В некоторых упражнениях бывает полезным перейти от $a^{m/n}$ к $\sqrt[n]{a^m}$, а иногда — наоборот. Ошибочно будет написать, что $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$. Действительно, областью определения функции $y = \sqrt[3]{x}$ является R, а областью определения функции $y = x^{1/3}$ является множество $[0; +\infty)$. Поэтому можно утверждать, что равенство $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ верно только при $x \in [0; +\infty)$.

Правильно записать так:

$$\sqrt[3]{x} = \begin{cases} x^{1/3}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -(-x)^{1/3}, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Пусть теперь $y = \sqrt[3]{x^2}$. У этой функции область определения $D(y) = R$.

$$\sqrt[3]{x^2} = |x|^{2/3} = \begin{cases} x^{2/3}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ (-x)^{2/3}, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

► ***Определение 5.*** $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$, где $r \in Q$, $a \neq 0$.

Свойства степени с рациональным показателем

Если $a > 0$, $b > 0$, $p \in Q$, $q \in Q$, то справедливы следующие равенства:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$.
3. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$.
4. $(a/b)^p = a^p/b^p$.

Замечание. Если $p \in Z$ и $q \in Z$, то ограничение $a > 0$ и $b > 0$ можно ослабить до $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Если $p \in N$ и $q \in N$, то ограничение $a \neq 0$ и $b \neq 0$ остается лишь для равенств 2 и 4.

► ***Определение 6.*** Корнем n-й степени ($n \in N$, $n > 1$) из числа a называется такое число b, n-я степень которого равна a, т. е. $b^n = a$.

❑ Примеры:

1. Корень 3-й степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
2. Корень 3-й степени из числа -8 равен -2, так как $(-2)^3 = -8$.
3. Корень 3-й степени из числа 0 равен 0.
4. Корень 2-й степени из числа 4 равен как числу 2, так и числу -2, так как $2^2 = 4$, $(-2)^2 = 4$.
5. Корень 2-й степени из числа 0 равен 0.
6. Корень 2-й степени из числа -4 не существует.

Если $n = 2k + 1$, где $k \in N$, то корень n степени из числа обозначается так: $\sqrt[n]{a}$.

Если же $n = 2k$, где $k \in \mathrm{N}$, то знак $\sqrt[n]{a}$ обозначает лишь неотрицательное значение корня из неотрицательного числа a.

Например: $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{0} = 0$.

Ошибочно писать так: $\sqrt{4} = \pm 2$. Правильная запись: $\sqrt{4} = 2$, $-\sqrt{4} = -2$.

▶ ***Определение 7.*** Арифметическим корнем n-й степени ($n \in \mathrm{N}$, $n > 1$) из числа a называется неотрицательное число b, n-я степень которого равна a.

Возвращаясь к предыдущему, отметим, что $\sqrt[2k]{a}$, где $k \in \mathrm{N}$, $a \geqslant 0$, обозначает только арифметический корень из числа a.

Полезно запомнить, что $\sqrt[2k]{a} \geqslant 0$ ($a \geqslant 0$, $k \in \mathrm{N}$).

Свойства корней

1. $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|}$, где $ab \geqslant 0$, $k \in \mathrm{N}$.
2. $\sqrt[2k]{a/b} = \sqrt[2k]{|a|}/\sqrt[2k]{|b|}$, где $a/b \geqslant 0$, $k \in \mathrm{N}$.
3. $\sqrt[2k+1]{ab} = \sqrt[2k+1]{a} \cdot \sqrt[2k+1]{b}$, где $a \in \mathrm{R}$, $b \in \mathrm{R}$, $k \in \mathrm{N}$.
4. $\sqrt[2k+1]{a/b} = \sqrt[2k+1]{a}/\sqrt[2k+1]{b}$, где $a \in \mathrm{R}$, $b \in \mathrm{R}$, $b \neq 0$, $k \in \mathrm{N}$.
5. $\sqrt[2k+1]{a^{(2k+1)n}} = a^n$, где $a \in \mathrm{R}$, $k \in \mathrm{N}$, $n \in \mathrm{Z}$.
6. $\sqrt[2n]{a^{2n \cdot k}} = \begin{cases} a^k, & \text{где } k = 2m,\ m \in \mathrm{N},\ a \in \mathrm{R}, \\ |a^k|, & \text{где } k = 2m + 1,\ m \in \mathrm{N},\ a \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Следствие: $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, $n \in \mathrm{N}$, $a \in \mathrm{R}$.

7. Основное свойство арифметического корня.

а) $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n \cdot m]{a^{km}}$, где $a^k \geqslant 0$, $k \in \mathrm{N}$, $n \in \mathrm{N}$, $n > 1$, $m \in \mathrm{N}$.

б) Если $a \in \mathrm{R}$, $n \in \mathrm{N}$, $n > 1$, $m \in \mathrm{N}$, $k \in \mathrm{N}$, то

$$\sqrt[2m \cdot n]{a^{2m \cdot k}} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^k}, & \text{если } k \text{ — четное число,} \\ \sqrt[n]{|a^k|}, & \text{если } k \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

❑ Примеры. Упростите выражения:

1. $\sqrt[6]{a^8} = \sqrt[3]{a^4}$.

2. $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{|a|} = \begin{cases} \sqrt{a}, & \text{если } a \geqslant 0, \\ \sqrt{-a}, & \text{если } a < 0. \end{cases}$

3. $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{|a|} = \begin{cases} \sqrt[3]{a}, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -\sqrt[3]{a}, & \text{если } a < 0. \end{cases}$

в) $\sqrt[(2m+1)n]{a^{(2m+1)k}} = \sqrt[n]{a^k}$, где $n \in \mathrm{N}$, $n > 1$, $k \in \mathrm{N}$, $m \in \mathrm{N}$, $a^k \geqslant 0$.

Замечание. Если n — нечетное число, то свойство 7*в* будет справедливо при $a \in \mathrm{R}$, т. е. условие $a^k \geqslant 0$ можно ослабить.

❑ Примеры.

1. $\sqrt[9]{m^3} = \sqrt[3]{m}$.

2. $\sqrt[6]{(c-1)^3} = \sqrt{c-1}$.

3. $\sqrt[6]{b^4} = \sqrt[3]{b^2}$.

4. $\sqrt[15]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^2}$.

1.2. Упражнения на действия с радикалами

А теперь решим ряд упражнений, для выполнения которых надо глубоко понимать вышеперечисленные свойства.

№ 1. Найдите область определения выражения (ООВ):

а) $\sqrt{a-1}$.

б) $\sqrt{-b}$.

в) $\sqrt{|x|}$.

г) $\sqrt[3]{x^3 - x + 1}$.

д) $(1-x)^{-1/3}$.

е) $(x-3)^{2/5}$.

ж) $(x^2+1)^{1/4}$.

з) $\sqrt{-(b-2)^2}$.

и) $\sqrt{\lg \sin x}\,/\cos x$.

к) $\sqrt{a^3(b^2+1)}$.

л) $\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})c^3}$.

м) $\sqrt[4]{1-a} \cdot \sqrt[3]{a-1}$.

н) $\frac{1}{c}\sqrt[4]{c^9/(c-2)^4}$.

о) $\sqrt{x^2-4x+4}$.

п) $\sqrt{(\sin x-3)(\cos y-4)}$.

р) $\sqrt{x^2-16}$.

с) $\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}}$.

т) $\sqrt{-x\sqrt{3-x}}$.

у) $\sqrt{\frac{b^2+1}{|b|-2}}$.

ф) $\sqrt{-\sin^2 x}\,/(x+2\pi)$.

х) $\sqrt{1-2\sin x}\,/(x^2-2x)$.

ц) $\sqrt{\log_2^2(x-1)\cdot\cos x}$.

Ответы: а) $[1;+\infty)$. б) $(-\infty;0]$. в) $\mathbb{R}$. г) $\mathbb{R}$. д) $(-\infty;1)$. е) $[3;+\infty)$. ж) $\mathbb{R}$. з) $\{2\}$. и) $\varnothing$. к) $\begin{cases} a\in[0;+\infty), \\ b\in\mathbb{R}. \end{cases}$ л) $(-\infty;0]$. м) $(-\infty;\ 1]$. н) $(0;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. о) $\mathbb{R}$. п) $\begin{cases} x\in\mathbb{R}, \\ y\in\mathbb{R}. \end{cases}$ р) $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$. с) $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$. т) $(-\infty;0]$. у) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Последние три упражнения решим с объяснением.

ф) Для нахождения ООВ достаточно решить систему

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ x\neq -2\pi, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}, \\ x\neq -2\pi. \end{cases}$$

Воспользуемся единичной окружностью. Легко видеть, что все числа, соответствующие точке C (рис. 1), входят в область определения данного выражения. А среди чисел $x = 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ (точка A) есть число $x=-2\pi$. Поэтому ООВ принадлежат все $x=2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$, кроме -1.

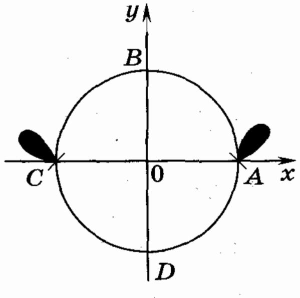


Рис. 1

Замечание. Если недопустимыми являются все числа некоторой точки единичной окружности, то точка вычеркивается знаком «×», а если только часть чисел является недопустимой, то будем обозначать знаком «\».

Ответ: πn, $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq -2$.

х) Решаем систему $\begin{cases} \sin x \leqslant 1/2, \\ x \neq 0,\ x \neq 2. \end{cases}$

Неравенству $\sin x \leqslant 1/2$ удовлетворяют все числа $x \in [-7\pi/6 + 2\pi k;\ \pi/6 + 2\pi k]$, где $k \in Z$. Число 2 не попадает в указанные множества, а $x = 0$ является одним из чисел, соответствующих точке A (рис. 2).

Ответ: $[-7\pi/6;\ 0) \cup (0;\ \pi/6] \cup [-7\pi/6 + 2\pi k;\ \pi/6 + 2\pi k]$, где $k \in Z$, $k \neq 0$.

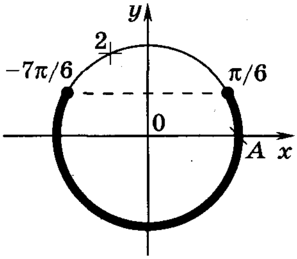


Рис. 2

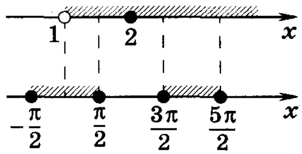


Рис. 3

ц) Находя ООВ, учтем, что, если $x - 1 > 0$, $x \neq 2$, то должно выполняться неравенство $\cos x \geqslant 0$ (рис. 3). При $x = 2$ данное выражение тоже определено.

Видим, что ООВ составляет множество чисел: $(1;\ \pi/2] \cup \{2\} \cup [-\pi/2 + 2\pi k;\ \pi/2 + 2\pi k]$, $k \in N$.

№ 2. Вынесите множитель из-под корня.

а) $\sqrt{5a^2}$.

ООВ: $a \in R$.

$$\sqrt{5a^2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2} = |a|\sqrt{5} = \begin{cases} a\sqrt{5}, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a\sqrt{5}, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

б) $\sqrt[6]{-10c^7}$.

ООВ: $c \leqslant 0$.

$$\sqrt[6]{-10c^7} = \sqrt[6]{(-10c) \cdot c^6} = |c|\sqrt[6]{-10c} = -c\sqrt[6]{-10c}.$$

в) $\sqrt[4]{(2-\sqrt{5})a^9}$.

ООВ: $a \leqslant 0$.

$\sqrt[4]{(2-\sqrt{5})a^9} = a^2\sqrt[4]{(2-\sqrt{5})a}$.

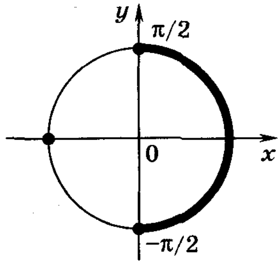


Рис. 4

г) $\sqrt{\sin^2 x \cdot \cos x}$.

ООВ: $\begin{cases} \cos x \geqslant 0, \\ x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z} \text{ (рис. 4)}. \end{cases}$

$$\sqrt{\sin^2 x \cdot \cos x} =$$

$$= \begin{cases} \sin x\sqrt{\cos x}, & \text{если } x \in (2\pi n;\ \pi/2 + 2\pi n),\ n \in \mathrm{Z}, \\ -\sin x\sqrt{\cos x}, & \text{если } x \in (-\pi/2 + 2\pi m;\ 2\pi m),\ m \in \mathrm{Z}, \\ 0, & \text{если } x = \dfrac{\pi}{2}k,\ k \in \mathrm{Z}. \end{cases}$$

д) $\sqrt[3]{-a^4b^{12}}$.

ООВ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ b \in \mathrm{R}. \end{cases}$ $\sqrt[3]{-a^4b^{12}} = -ab^4 \cdot \sqrt[3]{a}$.

е) $\sqrt{27a^3b^2c^6}$, где $b > 0$, $c \neq 0$.

ООВ: $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b > 0, \\ c \neq 0. \end{cases}$

$$\sqrt{27a^3b^2c^6} = 3ab|c^3|\sqrt{3a} =$$

$$= \begin{cases} 3abc^3 \cdot \sqrt{3a}, \text{ если } a \geqslant 0,\ b > 0,\ c > 0, \\ -3abc^3 \cdot \sqrt{3a}, \text{ если } a \geqslant 0,\ b > 0,\ c < 0. \end{cases}$$

ж) $\sqrt{(5-x)\log_2^2(x-1)}$.

ООВ: $1 < x \leqslant 5$.

Рис. 5

$$\sqrt{(5-x)\log_2^2(x-1)} =$$

$$= \begin{cases} \log_2(x-1)\sqrt{5-x}, \text{ если } 2 \leqslant x \leqslant 5, \\ -\log_2(x-1)\sqrt{5-x}, \text{ если } 1 < x < 2 \text{ (рис. 5)}. \end{cases}$$

з) $\sqrt{-\sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x}$.

ООВ: $\operatorname{tg} x \leqslant 0$, $x \in (-\pi/2 + \pi k; \pi k]$, $k \in Z$ (рис. 6).

$$\sqrt{-\sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x} = |\sin x \cdot \cos x|\sqrt{-\operatorname{tg} x} =$$
$$= -\sin x \cos x \sqrt{-\operatorname{tg} x} = (-1/2)\sin 2x \sqrt{-\operatorname{tg} x}.$$

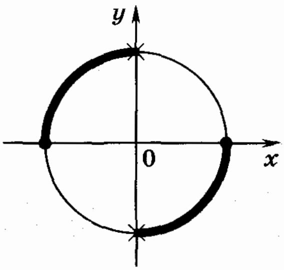


Рис. 6

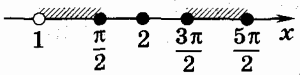


Рис. 7

и) $\sqrt{\log_2^2(x-1) \cdot \cos x}$.

ООВ: $(1; \pi/2] \cup \{2\} \cup [-\pi/2 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k]$, $k \in N$ (рис. 7).

$$\sqrt{\log_2^2(x-1) \cdot \cos x} = |\log_2(x-1)|\sqrt{\cos x} =$$
$$= \begin{cases} -\log_2(x-1)\sqrt{\cos x}, & \text{если } x \in (1; \pi/2], \\ 0, & \text{если } x = 2, \\ \log_2(x-1)\sqrt{\cos x}, & \text{если } x \in [-\pi/2 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k], \\ & k \in N. \end{cases}$$

№ 3. Внесите множитель под знак корня.

а) $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$. **в)** $4\sqrt{2} = \sqrt{32}$.

б) $-2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{-16}$. **г)** $-2\sqrt{3} = -\sqrt{12}$.

д) $(-3 + \sqrt{2})\sqrt{2} = -\sqrt{(3 - \sqrt{2})^2 2}$.

е) $x\sqrt{2}$.

ООВ: $x \in \mathrm{R}$. $x\sqrt{2} = \begin{cases} \sqrt{2x^2}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -\sqrt{2x^2}, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

ж) $a\sqrt[3]{2}$.

ООВ: $a \in \mathrm{R}$. $a\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2a^3}$.

з) $(1-a)\sqrt[4]{3}$.

ООВ: $a \in \mathrm{R}$.

$$(1-a)\sqrt[4]{3} = \begin{cases} \sqrt[4]{3(1-a)^4}, & \text{если } a \leqslant 1, \\ -\sqrt[4]{3(1-a)^4}, & \text{если } a > 1. \end{cases}$$

и) $(a-1)\sqrt{-a}$. Установим ООВ: $a \leqslant 0$. Теперь нас интересует знак выражения $(a-1)$ в ООВ. Удобно следующее оформление с помощью двух осей: на первой оси отмечаем числа, составляющие ООВ, а на другой — интервалы знакопостоянства разности $a-1$ (рис. 8).

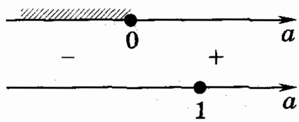


Рис. 8

Легко видеть, что в области определения данного выражения $a-1<0$. А потому $(a-1)\sqrt{-a} = -\sqrt{-a(a-1)^2}$.

к) $(a-1)\sqrt{a-2}$.

ООВ: $a \geqslant 2$.

$(a-1)\sqrt{a-2} = \sqrt{(a-1)^2(a-2)}$ (рис. 9).

л) $(a-2)\sqrt{1-a}$.

ООВ: $a \leqslant 1$.

$(a-2)\sqrt{1-a} = -\sqrt{(a-2)^2(1-a)}$ (рис. 10).

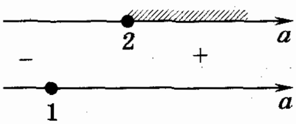


Рис. 9

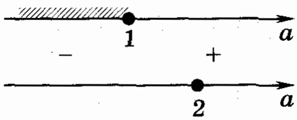


Рис. 10

м) $a\sqrt{-a}$.

ООВ: $a \leqslant 0$. $a\sqrt{-a} = -\sqrt{-a^3}$ (рис. 11).

н) $x\sqrt{1-x}$.

ООВ: $x \leqslant 1$.

$$x\sqrt{1-x} = \begin{cases} \sqrt{x^2(1-x)}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\sqrt{x^2(1-x)}, & \text{если } x < 0 \text{ (рис. 12).} \end{cases}$$

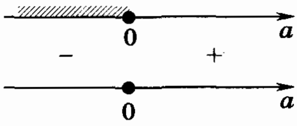


Рис. 11

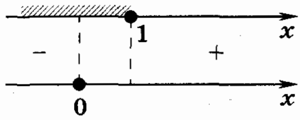


Рис. 12

о) $(a-3)\sqrt{a}$.

ООВ: $a \geqslant 0$.

$$(a-3)\sqrt{a} = \begin{cases} \sqrt{a(a-3)^2}, & \text{если } a \geqslant 3, \\ -\sqrt{a(a-3)^2}, & \text{если } 0 \leqslant a < 3 \text{ (рис. 13).} \end{cases}$$

п) $m\sqrt[3]{m-1}$.

ООВ: $m \in \mathrm{R}$. $m\sqrt[3]{m-1} = \sqrt[3]{m^3(m-1)}$.

р) $(a-b)\sqrt{\dfrac{1}{a^2-2ab+b^2}}$.

$$\text{ООВ: } \begin{cases} a \neq b, \\ a \in \mathrm{R}, \\ b \in \mathrm{R}. \end{cases}$$

$$(a-b)\sqrt{\frac{1}{a^2-2ab+b^2}} = (a-b)\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } a > b, \\ -1, & \text{если } a < b. \end{cases}$$

с) $(3-m)\sqrt{\dfrac{1}{m-3}}$.

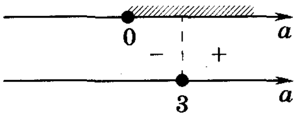


Рис. 13

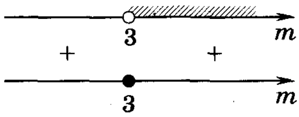


Рис. 14

ООВ: $m > 3$.

$(3-m)\sqrt{\dfrac{1}{m-3}} = -\sqrt{\dfrac{(m-3)^2}{m-3}} = -\sqrt{m-3}$ (рис. 14).

т) $x^2\sqrt{\dfrac{3}{x}}$.

ООВ: $x > 0$. $x^2\sqrt{\dfrac{3}{x}} = \sqrt{3x^3}$.

у) $am\sqrt{a}$.

ООВ: $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ m \in \mathrm{R}. \end{cases}$ $am\sqrt{a} = \begin{cases} \sqrt{a^3m^2}, & \text{если } m \geqslant 0, \\ -\sqrt{a^3m^2}, & \text{если } m < 0. \end{cases}$

ф) $m \cdot n\sqrt{-\dfrac{m}{n}}$.

ООВ: $\dfrac{m}{n} \leqslant 0$.

$m \cdot n\sqrt{-\dfrac{m}{n}} = -\sqrt{-m^3n}$.

х) $-x\sqrt[5]{x}$.

ООВ: $x \in \mathrm{R}$. $-x\sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{-x^6}$.

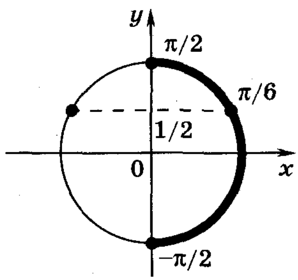


Рис. 15

ц) $(\sin x - 1/2)\sqrt{\cos x}$.

ООВ: $\cos x \geqslant 0$.

$(\sin x - 1/2)\sqrt{\cos x} =$

$$= \begin{cases} \sqrt{\cos x(\sin x - 1/2)^2}, & \text{если } x \in [\pi/6 + 2\pi n; \\ & \pi/2 + 2\pi n],\ n \in \mathrm{Z}, \\ -\sqrt{\cos x(\sin x - 1/2)^2}, & \text{если } x \in [-\pi/2 + 2\pi n; \\ & \pi/6 + 2\pi n),\ n \in \mathrm{Z} \text{ (рис. 15).} \end{cases}$$

№ 4. Представьте в виде произведения квадратных корней:

а) $\sqrt{(b-1)(b-3)}$, если $b \geqslant 3$.

$\sqrt{(b-1)(b-3)} = \sqrt{b-1} \cdot \sqrt{b-3}$.

б) $\sqrt{(b-2)(b-3)}$, если $b \leqslant 2$.

$\sqrt{(b-2)(b-3)} = \sqrt{|b-2|} \cdot \sqrt{|b-3|} =$
$= \sqrt{2-b} \cdot \sqrt{3-b}$.

в) $\sqrt{a^2-4}$.

ООВ: $|a| \geqslant 2$ (рис. 16).

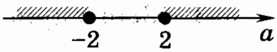


Рис. 16

$\sqrt{a^2-4} = \sqrt{(a-2)(a+2)} =$
$= \sqrt{|a-2|} \cdot \sqrt{|a+2|} =$

$$= \begin{cases} \sqrt{a-2} \cdot \sqrt{a+2}, & \text{если } a \geqslant 2, \\ \sqrt{2-a} \cdot \sqrt{-a-2}, & \text{если } a \leqslant -2. \end{cases}$$

г) $\sqrt{25-b^2}$.

ООВ: $|b| \leqslant 5$ (рис. 17).

$\sqrt{25-b^2} = \sqrt{(5-b)(5+b)} = \sqrt{5-b} \cdot \sqrt{5+b}$.

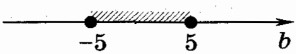


Рис. 17

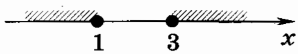


Рис. 18

д) $\sqrt{x^2-4x+3}$.

ООВ: $x^2-4x+3 \geqslant 0$ (рис. 18).

$\sqrt{x^2-4x+3} = \sqrt{(x-1)(x-3)} =$

$$= \begin{cases} \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-3}, & \text{если } x \geqslant 3, \\ \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{3-x}, & \text{если } x \leqslant 1. \end{cases}$$

е) $\sqrt{(\sin x - 2)(\cos y - 3)}$.

ООВ: $\begin{cases} x \in \mathrm{R}, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$$\sqrt{(\sin x - 2)(\cos y - 3)} = \sqrt{2 - \sin x} \cdot \sqrt{3 - \cos y}.$$

ж) $\sqrt{(3 - 2\sin x)(\sin x - 3)(\cos y - 5)}$.

ООВ: $\begin{cases} x \in \mathrm{R}, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$$\sqrt{(3 - 2\sin x)(\sin x - 3)(\cos y - 5)} =$$

$$= \sqrt{3 - 2\sin x} \times \sqrt{3 - \sin x} \times$$

$$\times \sqrt{5 - \cos y}.$$

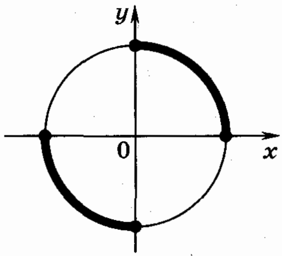


Рис. 19

з) $\sqrt{\sin x \cdot \cos x}$.

ООВ: $\sin x \cdot \cos x \geqslant 0$ (рис. 19).

$$\sqrt{\sin x \cdot \cos x} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \sqrt{\cos x}, & \text{если } x \in [2\pi n; \pi/2 + 2\pi n], \\ & n \in \mathrm{Z}, \\ \sqrt{-\sin x} \cdot \sqrt{-\cos x}, & \text{если } x \in [\pi + 2\pi k; 3\pi/2 + 2\pi k], \\ & k \in \mathrm{Z}. \end{cases}$$

№ 5. Представьте в виде квадратного корня:

а) $7 = \sqrt{49}$; $-5 = -\sqrt{25}$.

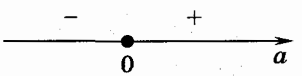


Рис. 20

б) a.

ООВ: $a \in \mathrm{R}$.

$$a = \begin{cases} \sqrt{a^2}, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -\sqrt{a^2}, & \text{если } a < 0 \text{ (рис. 20).} \end{cases}$$

в) $-b$.

ООВ: $b \in \mathrm{R}$.

$$-b = \begin{cases} \sqrt{b^2}, & \text{если } b \leqslant 0, \\ -\sqrt{b^2}, & \text{если } b < 0 \text{ (рис. 21).} \end{cases}$$

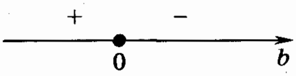


Рис. 21

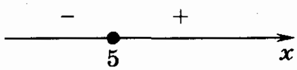


Рис. 22

г) $x - 5$.

ООВ: $x \in \mathrm{R}$.

$$x - 5 = \begin{cases} \sqrt{(x-5)^2}, & \text{если } x \geqslant 5, \\ -\sqrt{(x-5)^2}, & \text{если } x < 5 \text{ (рис. 22).} \end{cases}$$

д) $x + 4 = \begin{cases} \sqrt{(x+4)^2}, & \text{если } x \geqslant -4, \\ -\sqrt{(x+4)^2}, & \text{если } x < -4 \text{ (рис. 23).} \end{cases}$

ООВ: $x \in \mathrm{R}$.

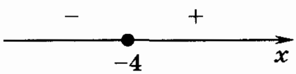


Рис. 23

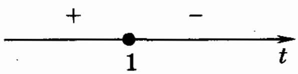


Рис. 24

е) $1 - t = \begin{cases} \sqrt{(1-t)^2}, & \text{если } t \leqslant 1, \\ -\sqrt{(1-t)^2}, & \text{если } t > 1 \text{ (рис. 24).} \end{cases}$

ООВ: $t \in \mathrm{R}$.

ж) $x^2 - 4 = \begin{cases} \sqrt{(x^2-4)^2}, & \text{если } |x| \geqslant 2, \\ -\sqrt{(x^2-4)^2}, & \text{если } |x| < 2 \text{ (рис. 25).} \end{cases}$

ООВ: $x \in \mathrm{R}$.

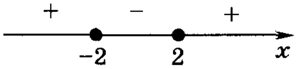


Рис. 25

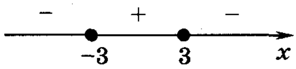


Рис. 26

з) $9 - x^2 = \begin{cases} \sqrt{(9 - x^2)^2}, & \text{если } |x| \leqslant 3, \\ -\sqrt{(9 - x^2)^2}, & \text{если } |x| > 3 \text{ (рис. 26).} \end{cases}$

ООВ: $x \in \mathrm{R}$.

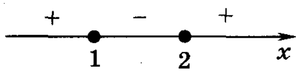


Рис. 27

и) $(x - 1)(x - 2) =$

$$= \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2(x-2)^2}, & \text{если } x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty), \\ -\sqrt{(x-1)^2(x-2)^2}, & \text{если } x \in (1; 2) \text{ (рис. 27).} \end{cases}$$

ООВ: $x \in \mathrm{R}$.

к) $\sin x =$

$$= \begin{cases} \sqrt{\sin^2 x}, & \text{если } x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k],\ k \in \mathrm{Z}, \\ -\sqrt{\sin^2 x}, & \text{если } x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n),\ n \in \mathrm{Z} \text{ (рис. 28).} \end{cases}$$

ООВ: $x \in \mathrm{R}$.

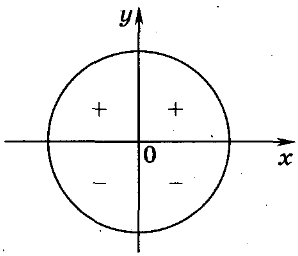


Рис. 28

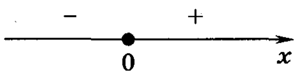


Рис. 29

л) $2^x - 1 = \begin{cases} \sqrt{(2^x - 1)^2}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -\sqrt{(2^x - 1)^2}, & \text{если } x < 0 \text{ (рис. 29).} \end{cases}$

ООВ: $x \in \mathrm{R}$.

м) $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 = \begin{cases} -\sqrt{((1/2)^x - 1)^2}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ \sqrt{((1/2)^x - 1)^2}, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ (рис. 30).

ООВ: $x \in \mathbf{R}$.

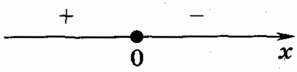


Рис. 30

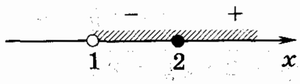


Рис. 31

н) $\log_2(x-1) = \begin{cases} \sqrt{\log_2^2(x-1)}, & \text{если } x \geqslant 2, \\ -\sqrt{\log_2^2(x-1)}, & \text{если } 1 < x < 2 \end{cases}$ (рис. 31).

ООВ: $x > 1$.

о) $|x-2| = \sqrt{(x-2)^2}$.

ООВ: $x \in \mathbf{R}$.

п) $(-\sqrt{5} + \cos x) = -\sqrt{(\sqrt{5} - \cos x)^2}$.

ООВ: $x \in \mathbf{R}$.

№ 6. Представьте в виде произведения квадратных корней, предварительно представив в виде корня:

а) $a = \begin{cases} \sqrt{a^2}, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -\sqrt{a^2}, & \text{если } a < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a}, & \text{если } a < 0 \end{cases}$ (рис. 32).

ООВ: $a \in \mathbf{R}$.

б) $x - 3 = \begin{cases} \sqrt{(x-3)^2}, & \text{если } x \geqslant 3, \\ -\sqrt{(3-x)^2}, & \text{если } x < 3 \end{cases} =$

$= \begin{cases} \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x-3}, & \text{если } x \geqslant 3, \\ -\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{3-x}, & \text{если } x < 3 \end{cases}$ (рис. 33).

ООВ: $x \in \mathbf{R}$.

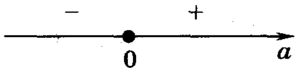


Рис. 32

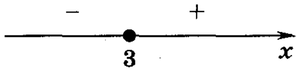


Рис. 33

в) $y + 2 = \begin{cases} \sqrt{(y+2)^2}, & \text{если } y \geqslant -2, \\ -\sqrt{(-y-2)^2}, & \text{если } y < -2 \end{cases} =$

$= \begin{cases} \sqrt{y+2} \cdot \sqrt{y+2}, & \text{если } y \geqslant -2, \\ -\sqrt{-y-2} \cdot \sqrt{-y-2}, & \text{если } y < -2 \text{ (рис. 34).} \end{cases}$

ООВ: $y \in \mathrm{R}$.

г) $-m - 1 = \begin{cases} -\sqrt{(m+1)^2}, & \text{если } m \geqslant -1, \\ \sqrt{(-m-1)^2}, & \text{если } m < -1 \end{cases} =$

$= \begin{cases} -\sqrt{m+1} \cdot \sqrt{m+1}, & \text{если } m \geqslant -1, \\ \sqrt{-m-1} \cdot \sqrt{-m-1}, & \text{если } m < -1 \text{ (рис. 35).} \end{cases}$

ООВ: $m \in \mathrm{R}$.

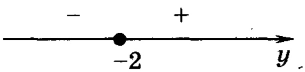


Рис. 34

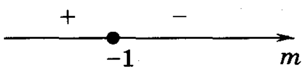


Рис. 35

д) $|x + 1| = \sqrt{(x+1)^2} =$

$= \begin{cases} \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}, & \text{если } x \geqslant -1, \\ \sqrt{-x-1} \cdot \sqrt{-x-1}, & \text{если } x < -1 \text{ (рис. 36).} \end{cases}$

ООВ: $x \in \mathrm{R}$.

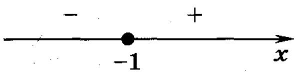


Рис. 36

е) $\sin x - 1/2 =$

$$= \begin{cases} \sqrt{(\sin x - 1/2)^2}, \\ \text{если } x \in [\pi/6 + 2\pi k; 5\pi/6 + 2\pi k],\ k \in Z, \\ -\sqrt{(1/2 - \sin x)^2}, \\ \text{если } x \in (-7\pi/6 + 2\pi n; \pi/6 + 2\pi n),\ n \in Z \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\sin x - 1/2} \cdot \sqrt{\sin x - 1/2}, \\ \text{если } x \in [\pi/6 + 2\pi k; 5\pi/6 + 2\pi k],\ k \in Z, \\ -\sqrt{1/2 - \sin x} \cdot \sqrt{1/2 - \sin x}, \\ \text{если } x \in (-7\pi/6 + 2\pi n; \pi/6 + 2\pi n),\ n \in Z \text{ (рис. 37)}. \end{cases}$$

ООВ: $x \in R$.

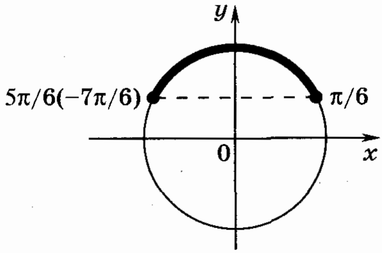


Рис. 37

№ 7. Установите, при каких значениях a верно равенство:

а) $(a-1)^0 = 1$.

б) $\sqrt{a^4} = a^2$.

в) $\sqrt[4]{a^{12}} = -a^3$.

г) $\sqrt[3]{a^3} = a$.

д) $\sqrt[4]{(a-1)^4} = a - 1$.

е) $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$.

ж) $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$.

з) $\sqrt[8]{(a-2)^4} = \sqrt{2-a}$.

и) $\sqrt[6]{(1-a)^2} = \sqrt[3]{1-a}$.

к) $\sqrt[6]{(a-1)^2} = \sqrt[3]{a-1}$.

л) $((a-2)^{1/5})^5 = a - 2$.

м) $((a+1)^{-1/3})^{-3} = a + 1$.

н) $\sqrt{(a-1)(a-2)} = \sqrt{a-1} \cdot \sqrt{a-2}$.

о) $\sqrt{a(2+a)} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a-2}$.

п) $\sqrt{a(2-a)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{2-a}$.

р) $\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}} = \dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{-a-1}}$.

с) $(a-1)\sqrt{a} = -\sqrt{a(a-1)^2}$.

т) $(-a+2)\sqrt{a-1} = \sqrt{(a-2)^2(a-1)}$.

у) $(|a|-a)^0 = 1$.

ф) $\sqrt{1-\cos^2 a} = \sin a$.

х) $\sqrt{1-\sin^2 a} = -\cos a$.

Ответы: **а)** $a \neq 1$. **б)** $a \in \mathrm{R}$. **в)** $a \leqslant 0$. **г)** $a \in \mathrm{R}$. **д)** $a \geqslant 1$. **е)** $a \geqslant 0$. **ж)** $a \in \mathrm{R}$. **з)** $a \leqslant 2$. **и)** $a \leqslant 1$. **к)** $a \geqslant 1$. **л)** $a \geqslant 2$. **м)** $a > -1$. **н)** $a \geqslant 2$. **о)** $a \leqslant -2$. **п)** $0 \leqslant a \leqslant 2$. **р)** $a < -1$. **с)** $0 \leqslant a \leqslant 1$. **т)** $1 \leqslant a \leqslant 2$. **у)** $a < 0$. **ф)** $a \in [2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathrm{Z}$. **х)** $a \in [\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n]$, $n \in \mathrm{Z}$.

№ 8. Упростите выражения:

а) $\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}+1} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1$.

б) $2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2} + 3^{\log_9(2+\sqrt{3})^2} = ((\sqrt{3}-2)^2)^{\log_4 2} + ((2+\sqrt{3})^2)^{\log_9 3} = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}+2)^2} = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 2 = 4$.

в) $\sqrt[4]{b^2-6b+9} = \sqrt[4]{(b-3)^2} = \sqrt{|b-3|} =$

$$= \begin{cases} \sqrt{b-3}, & \text{если } b \geqslant 3, \\ \sqrt{3-b}, & \text{если } b < 3 \text{ (рис. 38).} \end{cases}$$

ООВ: $b \in \mathrm{R}$.

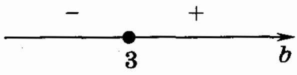


Рис. 38

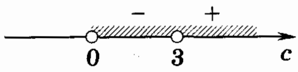


Рис. 39

г) $\dfrac{7(c-3)}{3c}\sqrt[8]{\dfrac{c^{11}}{(c-3)^8}}=\dfrac{7(c-3)}{3c}\,\dfrac{\sqrt[8]{c^{11}}}{\sqrt[8]{(c-3)^8}}=$

$$=\frac{7(c-3)\cdot c\cdot\sqrt[8]{c^3}}{3c|c-3|}=\begin{cases}\dfrac{7}{3}\sqrt[8]{c^3}, & \text{если } c>3,\\ -\dfrac{7}{3}\sqrt[8]{c^3}, & \text{если } 0<c<3 \text{ (рис. 39).}\end{cases}$$

ООВ: $\begin{cases} c>0,\\ c\neq 3.\end{cases}$

д) $\sqrt[4]{\dfrac{(m-3)^4}{m^8}}=\dfrac{\sqrt[4]{(m-3)^4}}{\sqrt[4]{m^8}}=\dfrac{|m-3|}{m^2}=$

$$=\begin{cases}(m-3)/m^2, & \text{если } m\geqslant 3,\\ (3-m)/m^2, & \text{если } m\in(-\infty;0)\cup(0;3).\end{cases}$$

ООВ: $m\neq 0$.

е) $\sqrt[10]{\dfrac{a^{22}}{(a+1)^{10}}}\cdot\dfrac{a^2-1}{2a^2}=\dfrac{\sqrt[10]{a^{22}}}{\sqrt[10]{(a+1)^{10}}}\cdot\dfrac{a^2-1}{2a^2}=$

$$=\frac{a^2\cdot\sqrt[10]{a^2}}{|a+1|}\cdot\frac{a^2-1}{2a^2}=\frac{a^2-1}{2}\cdot\frac{\sqrt[5]{|a|}}{|a+1|}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(a^2-1)\sqrt[5]{a}}{2(a+1)}, & \text{если } a\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty),\\ \dfrac{(1-a^2)\sqrt[5]{a}}{2(a+1)}, & \text{если } a\in(-1;0)\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(a-1)\sqrt[5]{a}}{2}, & \text{если } a\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty),\\ \dfrac{(1-a)\sqrt[5]{a}}{2}, & \text{если } a\in(-1;0) \text{ (рис. 40).}\end{cases}$$

ООВ: $a\neq 0$, $a\neq -1$.

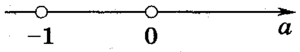


Рис. 40

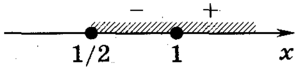


Рис. 41

ж) $\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}=$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(2x-1)-2\sqrt{2x-1}+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}=$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|\sqrt{2x-1}-1\right|=$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2x-1}-1), & \text{если } x\geqslant 1,\\[2mm] \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2x-1}), & \text{если } 1/2\leqslant x<1 \text{ (рис. 41).}\end{cases}$$

ООВ: $x\geqslant 1/2$.

з) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-2}$. Заметим, что $\sqrt[3]{-2}$ не является арифметическим корнем. Только представив его в виде $-\sqrt[3]{2}$, можно применить к $\sqrt[3]{2}$ основное свойство арифметического корня:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-2}=-\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=-\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{4}=-\sqrt[6]{32}.$$

и) $\sqrt{a-1}\cdot\sqrt[3]{a+3}=\sqrt[6]{(a-1)^3(a+3)^2}$.

ООВ: $a\geqslant 1$ (рис. 42).

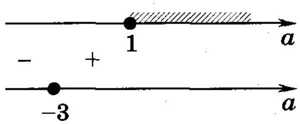


Рис. 42

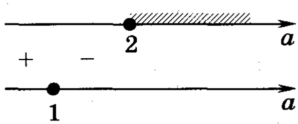


Рис. 43

к) $\sqrt{a-2}\cdot\sqrt[3]{1-a}=-\sqrt{a-2}\cdot\sqrt[3]{a-1}=$

$=-\sqrt[6]{(a-2)^3(a-1)^2}$.

ООВ: $a\geqslant 2$ (рис. 43).

л) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{2-a}$. Установим сначала ООВ: $a \geqslant 0$. Выражение $(2-a)$ в ООВ может принимать значения разных знаков (рис. 44).

Поэтому надо рассмотреть два случая: 1) $0 \leqslant a \leqslant 2$; 2) $a > 2$.

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{2-a} = \begin{cases} \sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{(2-a)^2}, & \text{если } 0 \leqslant a \leqslant 2, \\ -\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{(a-2)^2}, & \text{если } a > 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt[6]{a^3(2-a)^2}, & \text{если } 0 \leqslant a \leqslant 2, \\ -\sqrt[6]{a^3(a-2)^2}, & \text{если } a > 2. \end{cases}$$

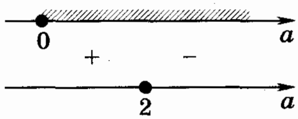


Рис. 44

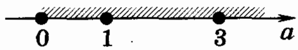


Рис. 45

м) $(3\sqrt{a} + \sqrt{(a-3)^2 a})\cdot\sqrt[3]{1-a} =$

$= (3\sqrt{a} + |a-3|\sqrt{a})\cdot\sqrt[3]{1-a} =$

$= \sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{1-a}\cdot(3+|a-3|) =$

$$= \begin{cases} \sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{1-a}\cdot(3+a-3), & \text{если } a \geqslant 3, \\ \sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{1-a}\cdot(3-a+3), & \text{если } 0 \leqslant a < 3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -a\sqrt[6]{a^3(a-1)^2}, & \text{если } a \geqslant 3, \\ \sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{1-a}\cdot(6-a), & \text{если } 0 \leqslant a < 3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -a\sqrt[6]{a^3(a-1)^2}, & \text{если } a \geqslant 3, \\ (6-a)\sqrt[6]{a^3(1-a)^2}, & \text{если } 0 \leqslant a \leqslant 1, \\ (a-6)\sqrt[6]{a^3(a-1)^2}, & \text{если } 1 < a < 3 \text{ (рис. 45).} \end{cases}$$

ООВ: $a \geqslant 0$.

№ 9. Упростите выражения, используя формулы сложных радикалов

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

где $A \geqslant \sqrt{B}$, $B > 0$ ($\sqrt{A + \sqrt{B}}$ и $\sqrt{A - \sqrt{B}}$ — сложные радикалы).

1) $\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{2(A + \sqrt{A^2 - B})}$, где $A \geqslant \sqrt{B}$, $B > 0$.

2) $\sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{2(A - \sqrt{A^2 - B})}$, где $A \geqslant \sqrt{B}$, $B > 0$.

3) $\sqrt{7 + \sqrt{48}} = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{49 - 48}}{2}} + \sqrt{\frac{7 - \sqrt{49 - 48}}{2}} = 2 + \sqrt{3}$.

4) $\sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6 + 4}{2}} - \sqrt{\frac{6 - 4}{2}} = \sqrt{5} - 1$.

5) $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}} = \sqrt{5} - 2$.

Выполним упрощение по действиям:

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{9 + \sqrt{80}} = \sqrt{\frac{9 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{9 - 1}{2}} = \sqrt{5} + 2.$$

$$\sqrt{17 - 4(\sqrt{5} + 2)} = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2.$$

6) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{2(5 + 1)} = 2\sqrt{3}$.

7) $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} - \sqrt{17 + 12\sqrt{2}} = -\sqrt{2(17 - 1)} = -4\sqrt{2}$.

8) $\sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a - 1}}$, где $a \geqslant 1$.

Воспользуемся формулой задания 1.

$$\sqrt{a+\sqrt{4a-4}}+\sqrt{a-\sqrt{4a-4}}=$$

$$=\sqrt{2(a+\sqrt{a^2-4a+4})}=\sqrt{2(a+\sqrt{(a-2)^2})}=$$

$$=\sqrt{2(a+|a-2|)}=\begin{cases}\sqrt{2(a+a-2)}, & \text{если } a\geqslant 2,\\ \sqrt{2(a-a+2)}, & \text{если } 1\leqslant a<2\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}2\sqrt{a-1}, & \text{если } a\geqslant 2,\\ 2, & \text{если } 1\leqslant a<2 \text{ (рис. 46).}\end{cases}$$

Рис. 46

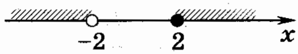


Рис. 47

9) Докажите:

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}(\sqrt{5}+1).$$

Подсказка: возведите обе части равенства в квадрат, а затем примените формулу сложных радикалов.

Перейдем к более сложным упражнениям.

№ 10. Упростите выражение

$$\frac{x^2-x-2+(x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-2+(x+1)\sqrt{x^2-4}}.$$

Решение.

Разложив на множители квадратные трехчлены x^2-x-2 и x^2+x-2, получим

$$\frac{(x-2)(x+1)+(x-1)\sqrt{x^2-4}}{(x+2)(x-1)+(x+1)\sqrt{x^2-4}}.$$

Установим ООВ: $\begin{cases}x^2-4\geqslant 0,\\ x\neq -2,\end{cases}$ $x\in(-\infty;-2)\cup[2;+\infty)$ (рис. 47).

Учитывая найденную ООВ, рассмотрим два случая: 1) $x\geqslant 2$; 2) $x<-2$.

1) Представим $\sqrt{x^2-4}$, $x-2$, $x+2$ в виде произведения корней:

$$\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2},$$

$$x-2=\sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-2},$$

$$x+2=\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x+2}.$$

И тогда данное выражение перепишется так:

$$\frac{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-2}(x+1)+(x-1)\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x+2}(x-1)+(x+1)\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}(x+1)+(x-1)\sqrt{x+2})}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}(x-1)+(x+1)\sqrt{x-2})}=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}.$$

2) Если $x<-2$, то $x+2<0$ и $x-2<0$. А поэтому

$$\sqrt{x^2-4}=\sqrt{(2-x)(-x-2)}=\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{-x-2},$$

$$x-2=-(2-x)=-\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{2-x},$$

$$x+2=-(-x-2)=-\sqrt{-x-2}\cdot\sqrt{-x-2}.$$

Переходим к данному выражению:

$$\frac{-\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{2-x}(x+1)+(x-1)\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{-x-2}}{-\sqrt{-x-2}\cdot\sqrt{-x-2}(x-1)+(x+1)\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{-x-2}}=$$

$$=\frac{-\sqrt{2-x}(\sqrt{2-x}(x+1)-(x-1)\sqrt{-x-2})}{\sqrt{-x-2}(-(x-1)\sqrt{-x-2}+(x+1)\sqrt{2-x})}=$$

$$=\frac{-\sqrt{2-x}}{\sqrt{-x-2}}=-\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}.$$

<u>Ответ</u>: 1) $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$, если $x\geqslant 2$.

2) $-\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$, если $x<-2$.

№ 11. Докажите тождество

$$\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}=\operatorname{ctg}(\alpha/2+\pi/4),$$

если $\pi<\alpha<2\pi$.

Решение.

Будем преобразовывать левую часть равенства, освободившись от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}=$$

$$=\frac{1+\cos\alpha+2\sqrt{1-\cos^2\alpha}+1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha-1+\cos\alpha}=\frac{1+|\sin\alpha|}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\cos(\alpha/2+\pi/4)}{\sin(\alpha/2+\pi/4)}=\operatorname{ctg}(\alpha/2+\pi/4).$$

Тождество доказано.

№ 12. Вычислите значение выражения $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ при $x=2ab/(b^2+1)$, если $a>0$.

Решение.

Преобразуем сначала данное выражение.

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{a+x+2\sqrt{a^2-x^2}+a-x}{a+x-a+x}=$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

А теперь вместо x подставим дробь $2ab/(b^2+1)$, если $a>0$.

$$\frac{a+\sqrt{a^2-4a^2b^2/(b^2+1)^2}}{2ab/(b^2+1)}=$$

$$=\frac{a(b^2+1)+a\sqrt{(b^2+1)^2-4b^2}}{2ab}=$$

$$= \frac{b^2 + 1 + \sqrt{(b^2-1)^2}}{2b} = \frac{b^2 + 1 + |b^2 - 1|}{2b} =$$

$$= \begin{cases} b, & \text{если } |b| \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{b}, & \text{если } |b| < 1,\ b \neq 0. \end{cases}$$

Ответ: 1) b, если $|b| \geqslant 1$, $a > 0$.
2) $1/b$, если $|b| < 1$, $b \neq 0$, $a > 0$.

№ 13. Упростите выражение

$$A = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha} + 2 + \frac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}$$

при $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

Решение.

Пусть $\dfrac{\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2} = t$, где $t > 0$. Тогда данное выражение примет вид $\sqrt{t + 2 + 1/t}$. И далее: $\sqrt{t + 2 + 1/t} = \sqrt{(t+1)^2/t} = (t+1)/\sqrt{t}$. Вместо t подставляем его значение:

$$A = \left(\frac{\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2} + 1\right) \Big/ \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} =$$

$$= \frac{(\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2|\sin\alpha|} =$$

$$= \frac{2(1+\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)^2 \cdot (-\sin\alpha)} = -2/\sin\alpha.$$

№ 14. Вычислите значение выражения

$$A = \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}} \text{ при } x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a/b} + \sqrt{b/a}\right), \text{ если } a > 0,$$

$b > 0$.

Решение.

Упростим сначала данное выражение:

$$\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}} = 2b\sqrt{x^2-1}\,(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Подставим вместо x его значение пока только в выражение $\sqrt{x^2-1}$:

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}(\sqrt{a/b}+\sqrt{b/a})^2-1}=$$

$$=\sqrt{(a+b)^2/(4ab)-1}=\sqrt{(a-b)^2/4ab}=$$

$$=|a-b|/(2\sqrt{ab}).$$

И далее: $A=\frac{b|a-b|}{\sqrt{ab}}\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}+\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}\right)=$

$$=\frac{|a-b|(a+b+|a-b|)}{2a}=\begin{cases}a-b, & \text{если } a\geqslant b,\\ (b/a)(b-a), & \text{если } a<b.\end{cases}$$

№ 15. Вычислите значение выражения

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} \text{ при } x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}, \text{ если } 2a<b<0.$$

Решение.

Заметим, что $a<0$, $b<0$, $2a-b<0$. И тогда $\sqrt{(2a-b)/b}=\sqrt{b-2a}/\sqrt{-b}$; $b=-\sqrt{-b}\cdot\sqrt{-b}$. Подставим вместо x его значение в данное выражение:

$$\left(1-\frac{\sqrt{b-2a}}{\sqrt{-b}}\right)\Big/\left(1+\frac{\sqrt{b-2a}}{\sqrt{-b}}\right)\times$$

$$\times\sqrt{\left(1+\frac{b\sqrt{b-2a}}{a\sqrt{-b}}\right)\Big/\left(1-\frac{b\sqrt{b-2a}}{a\sqrt{-b}}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{-b}-\sqrt{b-2a}}{\sqrt{-b}+\sqrt{b-2a}}\sqrt{\frac{a\sqrt{-b}+b\sqrt{b-2a}}{a\sqrt{-b}-b\sqrt{b-2a}}}=$$

$$=\frac{a+\sqrt{2ab-b^2}}{b-a}\sqrt{\frac{a\sqrt{-b}-\sqrt{-b}\cdot\sqrt{-b}\cdot\sqrt{b-2a}}{a\sqrt{-b}+\sqrt{-b}\cdot\sqrt{-b}\cdot\sqrt{b-2a}}}=$$

$$=\frac{a+\sqrt{2ab-b^2}}{b-a}\sqrt{\frac{a-\sqrt{2ab-b^2}}{a+\sqrt{2ab-b^2}}}=$$

$$=\frac{a+\sqrt{2ab-b^2}}{b-a}\sqrt{\frac{(a-\sqrt{2ab-b^2})^2}{a^2-2ab+b^2}}=$$

$$= \frac{a + \sqrt{2ab - b^2}}{b - a} \cdot \frac{\left|a - \sqrt{2ab - b^2}\right|}{|a - b|} =$$

$$= \frac{(a + \sqrt{2ab - b^2})(\sqrt{2ab - b^2} - a)}{(b - a)|a - b|} = \frac{-(a - b)^2}{(b - a)|a - b|} =$$

$$= -\frac{b - a}{|a - b|} = \begin{cases} 1, & \text{если } 2a < b < a, \\ -1, & \text{если } a < b < 0. \end{cases}$$

1.3. Иррациональные уравнения и системы

Определение. Уравнение, в котором переменная входит в какое-либо выражение, стоящее под знаком корня, называется *иррациональным уравнением* с одной переменной.

Приведем примеры таких уравнений:

1) $\sqrt{x^2 + 5x} = x + 2$.

2) $\sqrt{y - 3} - 2\sqrt{2 - y} = 8$.

3) $\sqrt{7 - x} = 5 - |x|$.

4) $12\sqrt{x} + x = 64$.

5) $\sqrt[3]{x + 34} = 1 + \sqrt[3]{x - 3}$.

Решая иррациональное уравнение, мы стараемся свести его к уравнению (или системе), не содержащему радикалы. При этом используются свойства корней, возведение обеих частей уравнения в одну степень, метод подстановки и др. И далеко не всегда при этом следим за потерей корней или приобретением посторонних. Да у нас, собственно, и нет теоретической базы для этого. В школьных учебниках по алгебре и началам анализа нет стройной теории равносильности уравнений, неравенств, систем уравнений и систем неравенств.

Существует несколько определений понятия «равносильность» применительно к уравнениям, неравенствам, системам уравнений (неравенств), совокупностям уравнений (неравенств) и им соответствующих теорий равносильности. Мы остановимся на определении равносильности уравнений на множестве.

Определение 1. Если всякий корень уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ (1), принадлежащий множеству М, является корнем уравнения $f_2(x) = g_2(x)$ (2), а любой корень уравнения (2), принадлежащий М, является корнем уравнения (1), то эти уравнения называются *равносильными на множестве* М.

Если оба уравнения не имеют корней на множестве М, то они тоже считаются равносильными на этом множестве. Определение 1 можно распространить и на структуры, понимая под ними неравенства, системы уравнений, системы уравнений и неравенств, совокупности систем и т. д.

Определение 2. Если всякий корень структуры (1), принадлежащий множеству М, является корнем структуры (2), а любой корень структуры (2), принадлежащий множеству М, является корнем структуры (2), то эти структуры называются *равносильными на множестве* М.

Если структуры (1) и (2) не имеют решений на множестве М, то они тоже считаются равносильными на этом множестве.

Выбор множества М очень важен, так как уравнения, равносильные на одном множестве, могут не быть равносильными на другом.

Определение 3[1]**.** Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ (1) с областью определения M_1 и $f_2(x) = g_2(x)$ (2) с областью определения M_2 называются равносильными на множестве $M \subseteq M_1 \cap M_2$, если они имеют одни и те же решения или не имеют решений на этом множестве.

Если уравнения равносильны на множестве $M = M_1 \cap M_2$, то будем говорить просто, что они *Б*-равносильны. Заметим, что если уравнения (1) и (2) *Б*-равносильны, то они равносильны и на любом подмножестве множества М. Обратно неверно.

---

[1] Впервые было сформулировано педагогом-математиком П. А. Буданцевым.

❑ Примеры.

1) Уравнение $\sqrt{x} = x - 2$ равносильно уравнению $x = (x - 2)^2$ на множестве $[2; +\infty]$, но они не равносильны на множестве $[0; +\infty)$, т. е. не $Б$-равносильны.

2) Уравнения $\sqrt{x + 1} \cdot \sqrt{x - 1} = 0$ и $\sqrt{(x + 1)(x - 1)} = 0$ $Б$-равносильны: $\text{M} = [1; +\infty)$, $x = 1$.

Эти же уравнения равносильны, например, и на множестве $[5; +\infty)$. Оба не имеют корней.

Приведенные ниже теоремы равносильности сформулированы в соответствии с определением 1.

Теорема I. Уравнения $f(x) = g(x)$ (3) и $f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x)$ (4), где $n \in \text{N}$, равносильны в области определения уравнения (3).

❑ **Пример.** Уравнение $2x - 1 = x - 2$ равносильно уравнению $(2x - 1)^3 = (x - 2)^3$ на множестве R.

Теорема II. Уравнение $f(x) = g(x)$ (3) равносильно уравнению $f^{2n}(x) = g^{2n}(x)$, $n \in \text{N}$ (5), на множестве решений неравенства $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$.

❑ **Пример.** Уравнения $2x - 1 = x - 1$ и $(2x - 1)^2 = = (x - 2)^2$ равносильны на множестве $(-\infty; 1/2] \cup [2; +\infty)$, являющемся множеством решения неравенства $(2x - 1)(x - 2) \geqslant 0$.

Следствие 1. *Уравнение* $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$ *равносильно уравнению* $f(x) = g^{2n}(x)$ *на множестве решений системы* $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

❑ **Пример.** Уравнение $\sqrt{2x - 1} = x - 2$ равносильно уравнению $2x - 1 = (x - 2)^2$ на множестве $[2; +\infty)$. Корнем будет число 5. Для более компактной записи решения мы можем от уравнения $\sqrt{2x - 1} = x - 2$ перейти к решению системы $\begin{cases} 2x - 1 = (x - 2)^2 \\ x - 2 \geqslant 0, \end{cases}$, заметив, что условие $2x - 1 \geqslant 0$ выполняется автоматически.

Следствие 2. *Уравнение* $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$ (6), *равносильно системе* $\begin{cases} f(x) = g^{2n}(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$ (7) *в своей области определения.*

Докажем это.

Пусть G — область определения уравнения (6).

Допустим, что x_1 — решение уравнения (6). Это значит, что $\sqrt[2n]{f(x_1)} = g(x_1)$ — верное числовое равенство. Из этого равенства следует, что $g(x_1) \geqslant 0$. Возведем обе части полученного числового равенства в степень $2n$: $f(x_1) = g^{2n}(x_1)$ — верное числовое равенство. Получили, что x_1 — решение системы (7).

Пусть x_2 — решение системы (7), т. е. x_2 удовлетворяет уравнению и неравенству этой системы: $\begin{cases} f(x_2) = g^{2n}(x_2), \\ g(x_2) \geqslant 0. \end{cases}$ Извлечем корень степени $2n$ из обеих частей верного числового равенства $f(x_2) = g^{2n}(x_2)$: $\sqrt[2n]{f(x_2)} = |g(x_2)|$. Учитывая, что $g(x_2) \geqslant 0$, раскроем модуль: $\sqrt[2n]{f(x_2)} = g(x_2)$. А это значит, что x_2 — решение уравнения (6).

Легко доказать методом от противного, что если одна из структур (6) или (7) не имеет решений на множестве G, то не имеет их и другая.

Теорема III. Уравнение $f^n(x) = g^n(x)$, где $n \in \mathrm{N}$, (8) является следствием уравнения $f(x) = g(x)$ (3).

❑ Пример. Уравнение $2x - 1 = (x - 2)^2$ содержит все корни уравнения $\sqrt{2x - 1} = x - 2$.

А теперь перейдем к рассмотрению приемов решения иррациональных уравнений.

1.3.1. Подготовительные упражнения

Следующие уравнения решите устно.

1) $\sqrt{y-2}=-(2-y)^2$.
2) $\sqrt{x^2}=-|x|$.
3) $\sqrt{x^2}=|x|$.
4) $\sqrt{(x-2)^2}=x-2$.
5) $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$.
6) $x^{\frac{1}{3}}=-1$; $\sqrt[3]{x}=-1$.
7) $\sqrt{y-1}=-(y+2)^2$.
8) $\sqrt{x}=x-|x|$.
9) $2\sqrt{x}=x+|x|$.
10) $\sqrt{2-x}+|2-x|=0$.
11) $(x-2)\sqrt{x-1}=0$.
12) $(x-1)\sqrt{x-2}=0$.
13) $\sqrt{(x-1)(x-2)}=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-2}$.
14) $\sqrt{(x-1)(x-2)}=\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{2-x}$.
15) $\sqrt{(x-1)(x-2)}=\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|x-2|}$.
16) $\sqrt{(x-1)(x-2)}=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2-x}$.
17) $\sqrt{x-5}-\sqrt{1-x}=1$.
18) $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x-5}=0$.
19) $\sqrt{x-3}+\sqrt{-x^2+9}=0$.
20) $\sqrt{10+x^2}=\pi/2$.

1.3.2. Анализ области определения уравнения (ООУ)

Довольно часто, решая иррациональное уравнение, мы начинаем с нахождения его области определения. И нередко этого бывает достаточно, чтобы найти множество корней уравнения.

№ 1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{9-x^2}-\sqrt{(x-1)(x+5)}+4.$$

Решение.

ООУ: $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geqslant 0, \\ 9 - x^2 \geqslant 0, \\ (x-1)(x+5) \geqslant 0 \end{cases}$
(рис. 48).

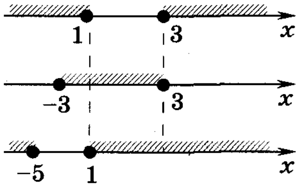


Рис. 48

Итак, в область определения данного уравнения входят только числа 1 и 3. Проверкой убеждаемся, что $x = 3$ — корень.

№ 2. Решите уравнение $\sqrt{10 + \sqrt{x - \sqrt{3}}} = 3$.

Решение.

ООУ: $x \geqslant \sqrt{3}$. Легко видеть, что $10 + \sqrt{x - \sqrt{3}} \geqslant 10$ при $x \geqslant \sqrt{3}$, а $\sqrt{10 + \sqrt{x - \sqrt{3}}} > 3$. Поэтому данное уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

№ 3. Решите уравнение $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{x^2 + x - 12}$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} 4 - x^2 \geqslant 0, \\ x^2 + x - 12 \geqslant 0 \end{cases}$
(рис. 49).

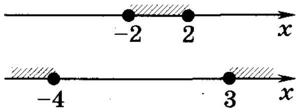


Рис. 49

Данное уравнение не определено ни при одном значении x. Поэтому решений не имеет.

Ответ: решений нет.

№ 4. Решите уравнение

$$\sqrt{y^2 + y} + \sqrt{y^2 - y - 2} + \sqrt{y^2 - 5y - 6} = 0.$$

Решение.

ООУ: $\begin{cases} y^2 + y \geqslant 0, \\ y^2 - y - 2 \geqslant 0, \\ y^2 - 5y - 6 \geqslant 0 \end{cases}$
(рис. 50).

Итак, $y \in (-\infty; -1] \cup [6; +\infty)$. Сумма неотрицательных чисел равна нулю, если все они равны 0. Значит, данному уравнению удовлетворяет только $y = -1$.

Ответ: -1.

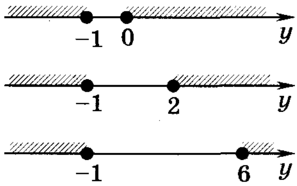


Рис. 50

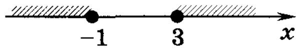


Рис. 51

Рис. 52

№ 5. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = -x^2 + 4x - 3$.

Решение.

ООУ: $x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$ (рис. 51).

Перепишем уравнение в виде

$\sqrt{x^2 - 2x - 3} = (x - 3)(1 - x)$.

Пользуясь определением арифметического квадратного корня, заключаем, что корнем данного уравнения может быть только такое число из ООУ, при котором $(x - 3)(1 - x) \geqslant 0$ (рис. 52).

Ответ: 3.

Заметим, что если бы мы попытались возвести в квадрат обе части данного уравнения, то получили бы уравнение 4-й степени, которое было бы решить значительно сложнее.

При решении иррациональных уравнений другими приемами мы убедимся, что не всегда нужно будет находить ООУ, а иногда это будет просто очень сложно сделать. Но во многих случаях нахождение ООУ полезно, так как сужает круг ненужных проверок. А если ООУ — конечное множество чисел, то остается только проверить эти найденные числа подстановкой в исходное уравнение.

1.3.3. Простейшие иррациональные уравнения

Простейшими иррациональными уравнениями будем называть уравнения вида $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$ (1) и $\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x)$ (2), где $n \in \mathbb{N}$. Именно к таким уравнениям сводятся многие более сложные иррациональные уравнения.

По следствию 2, решая уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$, достаточно решить систему $\begin{cases} f(x) = g^{2n}(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$ Заметим, что неравенство $f(x) \geqslant 0$ выполняется автоматически, так как $f(x) = g^{2n}(x)$, где $g^{2n}(x) \geqslant 0$. Поэтому область определения данного уравнения устанавливать не надо. Это будет лишним.

Уравнение $\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x)$ (1) равносильно уравнению $f(x) = g^{2n+1}(x)$ (3) в области определения уравнения (1) (теорема I). Заметим, что области определения уравнений (1) и (3) совпадают. Решим несколько простейших иррациональных уравнений.

№ 6. $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1$.

Решение.

Переходим к системе $\begin{cases} x^2 + 5x + 1 = (2x - 1)^2, \\ 2x - 1 \geqslant 0, \end{cases}$ равносильной данному уравнению в области его определения:

$$\begin{cases} x^2 - 3x = 0, \\ x \geqslant 1/2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 3, \end{array}\right. \\ x \geqslant 1/2, \end{cases} \qquad x = 3.$$

Ответ: 3.

№ 7. $\sqrt{2x^2 + 7x + 10} = 4 + x$.

Решение.

Решаем систему $\begin{cases} 2x^2 + 7x + 10 = (4 + x)^2, \\ x \geqslant -4. \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ x \geqslant -4, \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 3, \end{array}\right. \\ x \geqslant -4, \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Ответ: -2; 3.

№ 8. Решите уравнение $\sqrt[3]{7 - x} = -1$.

Решение.

Возводя обе части уравнения в куб, получим уравнение, равносильное данному: $7 - x = -1$, $x = 8$.

Ответ: 8.

№ 9. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 + 7x + 10} = x + 2$.

Решение.

Составим и решим систему

$$\begin{cases} 2x^2 + 7x + 10 = (x + 2)^2, \\ x \geqslant -2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 3x + 6 = 0, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$$

Квадратное уравнение действительных корней не имеет.

Ответ: решений нет.

№ 10. Решите уравнение $\sqrt{7 - x} = 5 - |x|$.

Решение.

Достаточно решить систему $\begin{cases} 7 - x = (5 - |x|)^2, \\ |x| \leqslant 5, \end{cases}$ которая сводится к совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7 - x = (5 - x)^2, \\ 0 \leqslant x \leqslant 5, \end{cases} \\ \begin{cases} 7 - x = (5 + x)^2, \\ -5 \leqslant x < 0, \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 9x + 18 = 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant 5, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 11x + 18 = 0, \\ -5 \leqslant x < 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Ответ: -2; 3.

№ 11. Решите уравнение $\sqrt{49 + 9x|x + 4|} - 2x = 7$.

Решение.

Перейдем к уравнению $\sqrt{49 + 9x|x + 4|} = 7 + 2x$.

А теперь, возведя обе части уравнения в квадрат, составим систему $\begin{cases} 49 + 9x|x+4| = 49 + 28x + 4x^2, \\ x \geqslant -3{,}5, \end{cases}$

равносильную данному уравнению в области его определения. Учтем, что $x + 4 > 0$ при $x \geqslant -3{,}5$:

$$\begin{cases} 9x(x+4) = 28x + 4x^2, \\ x \geqslant -3{,}5. \end{cases}$$

Перенесем все члены уравнения системы в одну часть и вынесем общий множитель за скобки:

$$\begin{cases} x(9x + 36 - 28 - 4x) = 0, \\ x \geqslant -3{,}5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(5x + 8) = 0, \\ x \geqslant -3{,}5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -8/5, \end{array} \right. \\ x \geqslant -3{,}5; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -8/5. \end{array} \right.$$

Ответ: $-8/5$; 0.

№ 12. Решите уравнение $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$.

Решение.

Пусть $\sin x = t$, где $|t| \leqslant 1$. Получим уравнение $\sqrt{5 - 2t} = 6t - 1$, которое сводится к системе

$$\begin{cases} 5 - 2t = (6t - 1)^2, \\ |t| \leqslant 1, \\ t \geqslant 1/6, \end{cases} \qquad \begin{cases} 18t^2 - 5t - 2 = 0, \\ 1/6 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1/2, \\ t = -2/9, \end{array} \right. \\ 1/6 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \qquad t = 1/2.$$

Остается решить уравнение $\sin x = 1/2$:

$x = (-1)^k \pi/6 + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $(-1)^k \pi/6 + \pi k$, $k \in Z$.

№ 13. Решите уравнение $x^2/\sqrt{2x + 15} + \sqrt{2x + 15} = 2x$.

Решение.

ООУ: $x > -15/2$. Освободимся от знаменателя дроби:

$$x^2 + 2x + 15 = 2x\sqrt{2x+15},$$

$$x^2 - 2x\sqrt{2x+15} + 2x + 15 = 0,$$

$$(x - \sqrt{2x+15})^2 = 0,$$

$$x - \sqrt{2x+15} = 0,$$

$$\sqrt{2x+15} = x,$$

$$\begin{cases} 2x + 15 = x^2, \\ x \geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 15 = 0, \\ x \geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -3, \end{array}\right. \\ x \geqslant 0, \end{cases} \quad x = 5.$$

Ответ: 5.

1.3.4. Возведение обеих частей уравнения в четную степень

Наиболее распространенным приемом решения иррациональных уравнений, содержащих арифметические квадратные корни, является возведение обеих частей уравнения в квадрат. По теореме III полученное уравнение является следствием данного, т. е. содержит все корни данного. Остается просто сделать проверку. Но есть такие уравнения, когда проверку сделать довольно сложно. Например, пусть надо решить уравнение $\sqrt{4x-1} - \sqrt{x-2} = 3$. Возводим обе части в квадрат, а потом еще раз в квадрат. Получим уравнение $9x^2 - 84x + 136 = 0$, у которого $x_1 = (14 + 2\sqrt{15})/3$; $x_2 = (14 - 2\sqrt{15})/3$. Вряд ли кому захочется проверять полученные значения x.

Ответ: $x_1 = (14 + 2\sqrt{15})/3$.

Но бывает и обратная ситуация. Решая уравнение $\sqrt{x^3 - x + 5} = \sqrt{x^3 + x^2 - 1}$, легче проверить корни уравнения $x^2 + x - 6 = 0$, полученного возведением в квадрат обеих частей данного уравнения.

Ответ: 2.

Поэтому, решая уравнение, надо выбирать наиболее рациональный путь решения.

Рассмотрим несколько упражнений.

№ 14. Решите уравнение $\sqrt{6+x} - \sqrt{4-x} = 2$.

Решение.

Установим ООУ: $\begin{cases} 6 + x \geqslant 0, \\ 4 - x \geqslant 0, \end{cases}$ $-6 \leqslant x \leqslant 4$ (рис. 53).

Перепишем данное уравнение в виде

$\sqrt{6+x} = 2 + \sqrt{4-x}$.

Мы видим, что обе части второго уравнения неотрицательны при любом $x \in [-6; 4]$. Поэтому, возведя обе части в квадрат, получим уравнение, равносильное данному в ООУ (т. II):

$6 + x = 4 + 4\sqrt{4-x} + 4 - x$, $2\sqrt{4-x} = x - 1$.

Возводя в квадрат обе части последнего уравнения, надо учесть, что должно выполняться неравенство $x - 1 \geqslant 0$ в области определения данного уравнения (рис. 54).

Рис. 53

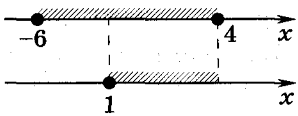


Рис. 54

Следовательно, уравнение $4(4 - x) = (x - 1)^2$ равносильно данному на множестве $M = [1; 4]$. Найдем корни полученного квадратного уравнения: $x^2 + 2x - 15 = 0$,

$\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -5. \end{array}\right.$

Ответ: 3.

Проверку делать, конечно, не надо, так как мы решали уравнение, соблюдая равносильность при переходе от одного уравнения к другому.

№ 15. Решите уравнение

$$\sqrt{8x^2+15x+2}-\sqrt{8x^2+9x-1}=1.$$

Решение.

Область определения уравнения устанавливать не будем. Перенесем $-\sqrt{8x^2+9x-1}$ в правую часть: $\sqrt{8x^2+15x+2}=\sqrt{8x^2+9x-1}+1$. Возведем обе части уравнения в квадрат (т. III):

$$8x^2+15x+2=1+2\sqrt{8x^2+9x-1}+8x^2+9x-1,$$

$$\sqrt{8x^2+9x-1}=3x+1.$$

Еще раз обе части возведем в квадрат:

$$8x^2+9x-1=9x^2+6x+1,$$

$$x^2-3x+2=0, \qquad \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Необходима проверка.

Ответ: 1; 2.

№ 16. Решите уравнение $\sqrt{11x-2}+3\sqrt{x}=6.$

Решение.

ООУ: $x \geqslant 2/11$ (рис. 55).

Рис. 55

Возведем обе части уравнения в квадрат (т. II):

$$11x-2+6\sqrt{11x^2-2x}+9x=36,$$

$$3\sqrt{11x^2-2x}=19-10x.$$

Учтем, что $19-10x \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant 1{,}9$.

Тогда, с учетом ООУ, $x \in [2/11;\ 1{,}9]$. Еще раз возводим в квадрат обе части последнего уравнения (т. II):

$$99x^2-18x=361-380x+100x^2,$$

$$x^2-362x+361=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=361. \end{array}\right.$$

Ответ: 1.

Замечание. Это уравнение можно было решить иначе. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{11x - 2} + 3\sqrt{x}$. Найдем ее производную: $y' = \frac{11}{2\sqrt{11x - 2}} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$. Легко видеть, что $y' > 0$, если $x > 2/11$. Поэтому функция y возрастает на множестве $(2/11;\ +\infty)$. Значит, если данное уравнение имеет корень, то он единственный. Подбором находим, что $x = 1$.

№ 17. Решите уравнение $\sqrt{x - 1} + \sqrt{2x + 2} = 4$.

Решение.

ООУ: $x \geqslant 1$ (рис. 56).

Возводим обе части уравнения в квадрат (т. II):

$x - 1 + 2\sqrt{2x^2 - 2} + 2x + 2 = 16,$

$2\sqrt{2x^2 - 2} = 15 - 3x.$

Заметим, что $15 - 3x \geqslant 0$; т. е. $x \leqslant 5$ (рис. 57).

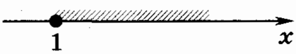


Рис. 56

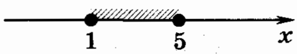


Рис. 57

На множестве $[1;\ 5]$ данное уравнение равносильно уравнению $4(2x^2 - 2) = (15 - 3x)^2$. Решив уравнение $x^2 - 90x + 233 = 0$, найдем его корни: $x_1 = 45 + 16\sqrt{7}$; $x_2 = 45 - 16\sqrt{7}$. Множеству $[1;\ 5]$ принадлежит только x_2.

Ответ: $45 - 16\sqrt{7}$.

№ 18. Решите уравнение $\sqrt{2x - 4} - \sqrt{x - 3} = \sqrt{3x - 11}$.

Решение.

ООУ: $x \geqslant 11/3$ (рис. 58).

Переписав данное уравнение в виде

$\sqrt{2x - 4} = \sqrt{x - 3} + \sqrt{3x - 11},$

возведем обе части его в квадрат (т. II):

$\sqrt{3x^2 - 20x + 33} = 5 - x$. Если данное уравнение имеет корни, то они должны принадлежать множеству $[11/3; 5]$. Возводим в квадрат обе части последнего уравнения:

$3x^2 - 20x + 33 = 25 - 10x + x^2,$

$x^2 - 5x + 4 = 0,$

$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 4. \end{array}\right.$

<u>Ответ</u>: 4.

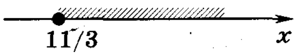


Рис. 58

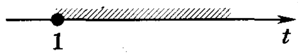


Рис. 59

№ 19. Решите уравнение $\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4\log_4 x - 2} = 4.$

<u>Решение</u>.

Перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{2\log_2 x - 2} = 4, \qquad (1)$$

не изменив при этом его область определения. Пусть $\log_2 x = t$. Тогда получим иррациональное уравнение

$$\sqrt{1 + t} + \sqrt{2t - 2} = 4. \qquad (2)$$

Найдем ООУ: $t \geqslant 1$.

Возведем обе части уравнения в квадрат (т. II):

$1 + t + 2\sqrt{2(t^2 - 1)} + 2t - 2 = 16,$

$$2\sqrt{2t^2 - 2} = 17 - 3t. \qquad (3)$$

Уравнение (3) будет равносильно уравнению (4), полученному возведением в квадрат обеих частей уравнения (3), на множестве $M = [1; 17/3]$ (т. II):

$$t^2 - 102t + 297 = 0, \qquad (4)$$

$\left[\begin{array}{l} t=3, \\ t=99. \end{array}\right.$ Видим, что $3 \in [1; 17/3]$, $99 \notin [1; 17/3]$.

Решим уравнение $\log_2 x = 3$, откуда $x = 8$.

Ответ: 8.

№ 20. Решите уравнение $\sqrt{-\cos x} = \sqrt{1 - 2\sin^2 x}$.

Решение.

Перепишем данное уравнение в виде $\sqrt{-\cos x} = \sqrt{2\cos^2 x - 1}$ и введем замену, обозначив $\cos x$ через t, где $|t| \leqslant 1$: $\sqrt{-t} = \sqrt{2t^2 - 1}$. Полученное уравнение в своей области определения равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} -t = 2t^2 - 1, \\ |t| \leqslant 1, \\ t \leqslant 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 2t^2 + t - 1 = 0, \\ -1 \leqslant t \leqslant 0, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} t = 1/2, \\ t = -1, \end{array}\right. \\ -1 \leqslant t \leqslant 0, \end{array}\right. \qquad t = -1.$$

Переходим к уравнению $\cos x = -1$:

$x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{\varphi(x)}$, где $n \in \mathbb{N}$, на множестве M, являющемся областью определения этого уравнения, равносильно каждой из систем

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) \geqslant 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} f(x) = \varphi(x), \\ \varphi(x) \geqslant 0. \end{array}\right.$$

№ 21. Решите уравнение $\sqrt{\sin(x + 3) - \sin 3 \cdot \cos x} = \sqrt{\cos x}$.

Решение.

Переходим к системе

$$\left\{\begin{array}{l} \sin(x + 3) - \sin 3 \cdot \cos x = \cos x, \\ \cos x \geqslant 0, \end{array}\right.$$

равносильной данному уравнению в области его определения:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos 3 = \cos x, \\ \cos x \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1/\cos 3, \\ \cos x > 0 \text{ (рис. 60)}, \end{cases}$$

здесь мы воспользовались единичной окружностью и линией тангенсов TT_1.

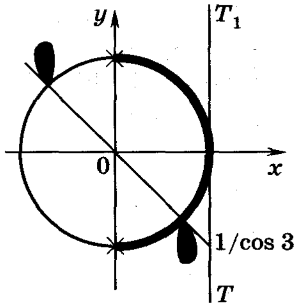


Рис. 60

$x = \operatorname{arctg}(1/\cos 3) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}(1/\cos 3) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

1.3.5. Графическое решение иррациональных уравнений

№ 22. Решите уравнение $\sqrt{x+2} = x$.

Решение.

Построим графики функций $y = \sqrt{x+2}$ и $y = x$.

График функции $y = \sqrt{x+2}$ — ветвь параболы $x = y^2 - 2$, осью которой служит ось абсцисс (рис. 61).

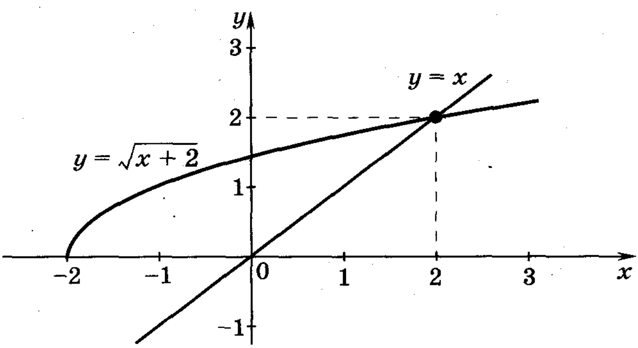


Рис. 61

Графики пересекаются в точке (2; 2).

Ответ: 2.

№ 23. Решите уравнение $\sqrt{2x+8} + \sqrt{x+5} = 7$.

Решение.

1 способ.

Строим графики функций $y = \sqrt{2x+8} + \sqrt{x+5}$ и $y = 7$. Заметим, что функция $y = \sqrt{2x+8} + \sqrt{x+5}$ определена только при $x \geqslant -4$ и монотонно возрастает (рис. 62). Вычислив несколько значений y при $x = -4, -2, -1, 4, 11, \ldots$, построим схематически график этой функции. Прямая $y = 7$ пересекает этот график в точке, абсцисса которой равна 4. Других точек пересечения построенные графики не имеют, так как $y = \sqrt{2x+8} + \sqrt{x+5}$ монотонна.

Ответ: 4.

2 способ. Перепишем данное уравнение в виде $\sqrt{2x+8} = 7 - \sqrt{x+5}$ и рассмотрим две функции $y = \sqrt{2x+8}$ и $y = 7 - \sqrt{x+5}$.

График функции $y = \sqrt{2x+8}$ — ветвь параболы $x = \frac{1}{2}y^2 - 4$, соответствующая только неотрицательным значениям y. Графиком функции $y = 7 - \sqrt{x+5}$ является ветвь параболы $x = y^2 - 14y + 44$, соответствующая значениям $y \leqslant 7$ (рис. 63).

№ 24. Решите уравнение $\sqrt{x-2} = x^2 - 4x - 10$.

Решение.

Построим графики функций $y = \sqrt{x-2}$ и $y = x^2 - 4x - 10$ (рис. 64).

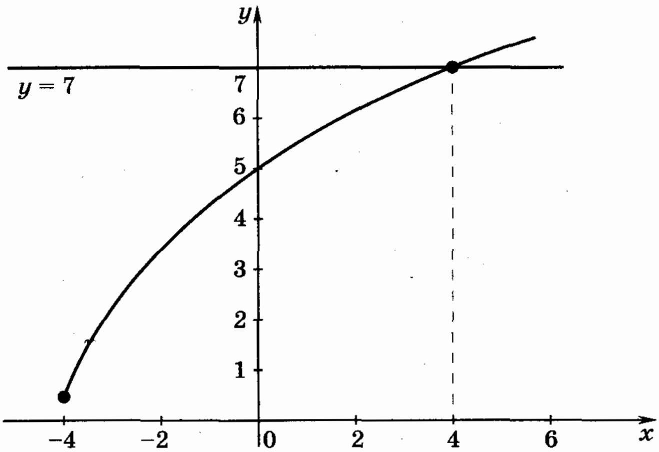


Рис. 62

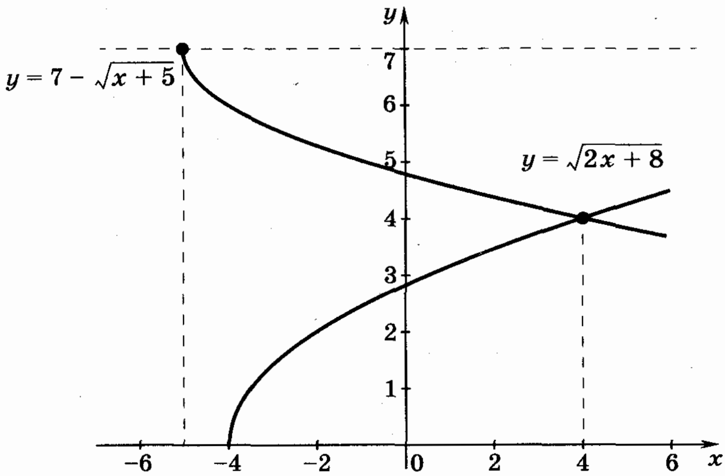


Рис. 63

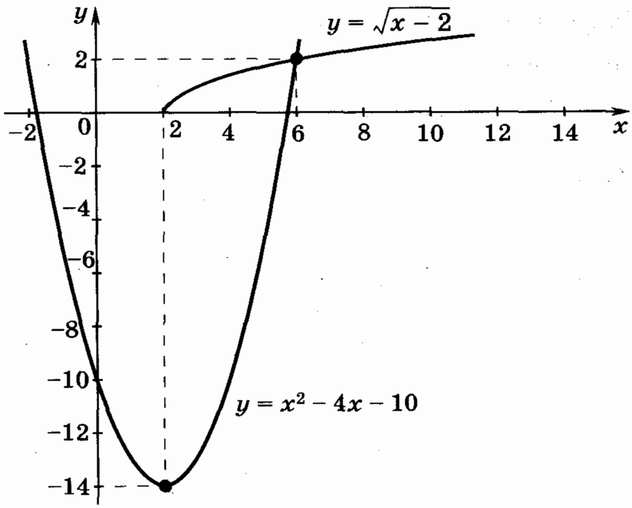


Рис. 64

Построенные графики пересекаются в точке (6; 2).

Ответ: 6.

1.3.6. Метод замены переменных

№ 25. Решите уравнение $\sqrt{x+2} = x$.

Решение.

Это уравнение, как простейшее иррациональное, можно решить, переходя к смешанной системе (следствие 2 из т. II), а также графически. Здесь мы покажем третий способ решения.

Пусть $y = \sqrt{x+2}$, где $y \geqslant 0$. Тогда, решив уравнение $y^2 = x + 2$ относительно x, найдем, что $x = y^2 - 2$. Данное уравнение примет вид $y = y^2 - 2$. Решаем его, учитывая, что $y \geqslant 0$:

$$\begin{cases} y^2 - y - 2 = 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = -1, \end{array}\right. \\ y \geqslant 0, \end{cases} \qquad y = 2.$$

Опять переходим к x: $2 = \sqrt{x+2}$, $x + 2 = 4$, $x = 2$.

Ответ: 2.

№ 26. Решите уравнение

$$2x - 5 + 2\sqrt{x^2 - 5x} + 2\sqrt{x-5} + 2\sqrt{x} = 48.$$

Решение.

ООУ: $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \geqslant 5, \end{cases}$ $x \geqslant 5$.

Представим данное уравнение в виде

$$(x - 5 + 2\sqrt{x(x-5)} + x) + 2(\sqrt{x-5} + \sqrt{x}) = 48.$$

И далее: $(\sqrt{x-5} + \sqrt{x})^2 + 2(\sqrt{x-5} + \sqrt{x}) - 48 = 0$.

Пусть $\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = y$, где $y \geqslant 0$.

Получим уравнение $y^2 + 2y - 48 = 0$: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = -8, \\ y = 6, \end{array}\right. \\ y \geqslant 0, \end{cases}$ $y = 6$.

Остается решить уравнение $\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = 6$:

$\sqrt{x-5} = 6 - \sqrt{x}$,

$\begin{cases} x - 5 = (6 - \sqrt{x})^2, \\ 5 \leqslant x \leqslant 36; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x} = 41/12, \\ 5 \leqslant x \leqslant 36, \end{cases}$ $\begin{cases} x = (41/12)^2, \\ 5 \leqslant x \leqslant 36, \end{cases}$

$x = (41/12)^2$.

Ответ: $(41/12)^2$.

№ 27. Решите уравнение

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x + 4 + 3\sqrt{2x-1}} = \sqrt{32}.$$

Решение.

Пусть $\sqrt{2x-1} = y$, где $y \geqslant 0$:

$2x - 1 = y^2$, $\quad x = \dfrac{y^2+1}{2}$.

Данное уравнение относительно y примет вид

$\sqrt{(y^2+1)/2+y} + \sqrt{(y^2+9)/2+3y} = \sqrt{32}$:

$$\begin{cases} |y+1|+|y+3|=8, \\ y \geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y+1+y+3=8, \\ y \geqslant 0, \end{cases} \quad y=2.$$

$\sqrt{2x-1} = 2$, $2x-1=4$, $x=2{,}5$.

Ответ: 2,5.

№ 28. Решите уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Решение.

Пусть $y = \sqrt{x-1}$, где $y \geqslant 0$. Выразим x через y:

$y^2 = x-1$, $x = y^2+1$.

Перейдем к уравнению относительно y:

$\sqrt{y^2-4y+4} + \sqrt{y^2-6y+9} = 1$,

$\sqrt{(y-2)^2} + \sqrt{(y-3)^2} = 1$,

$|y-2|+|y-3| = 1$ (рис. 65).

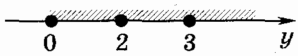


Рис. 65

Раскроем модули.

Получим совокупность трех систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 2, \\ 2-y+3-y=1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < y \leqslant 3, \\ y-2+3-y=1, \end{cases} \\ \begin{cases} y > 3, \\ y-2+y-3=1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 2, \\ y=2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < y \leqslant 3, \\ 0 \cdot y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y > 3, \\ y=3; \end{cases} \end{array}\right. \quad 2 \leqslant y \leqslant 3.$$

И далее: $2 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 3$, $4 \leqslant x-1 \leqslant 9$, $5 \leqslant x \leqslant 10$.

Ответ: [5; 10].

№ 29. Решите уравнение

$$z+42-11\sqrt{z^2-z-42} - z^2 = 0.$$

Решение.

Пусть $\sqrt{z^2 - z - 42} = t$, где $t \geqslant 0$. Перепишем данное уравнение в виде

$$z^2 - z - 42 + 11\sqrt{z^2 - z - 42} = 0.$$

И тогда имеем $\begin{cases} t^2 + 11t = 0, \\ t \geqslant 0, \end{cases}$ $t = 0.$

Достаточно решить уравнение $\sqrt{z^2 - z - 42} = 0$: $\left[\begin{array}{l} z = -6, \\ z = 7. \end{array}\right.$

Ответ: –6; 7.

№ 30. Решите уравнение $x^2 - 3x = 5\sqrt{x^2 - 3x + 24}$.

Решение.

Пусть $\sqrt{x^2 - 3x + 24} = y$, где $y \geqslant 0$. Тогда

$x^2 - 3x + 24 = y^2$, $x^2 - 3x = y^2 - 24$.

Переходим к системе

$$\begin{cases} y^2 - 24 = 5y, \\ y \geqslant 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - 5y - 24 = 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 8, \\ y = -3, \end{array}\right. \\ y \geqslant 0, \end{cases} \quad y = 8.$$

Решаем уравнение $\sqrt{x^2 - 3x + 24} = 8$:

$$x^2 - 3x + 24 = 64,\ x^2 - 3x - 40 = 0,\ \left[\begin{array}{l} x = -5, \\ x = 8. \end{array}\right.$$

Ответ: –5; 8.

№ 31. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{2x + 2}{x + 2}} - \sqrt{\dfrac{x + 2}{2x + 2}} = 7/12.$

Решение.

Пусть $\sqrt{(2x + 2)/(x + 2)} = y$, где $y > 0$. Тогда $\sqrt{(x + 2)/(2x + 2)} = 1/y$. Получим уравнение $y - 1/y = 7/12$. Учитывая, что $y > 0$, решим систему

$$\begin{cases} 12y^2 - 7y - 12 = 0, \\ y > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 4/3, \\ y = -3/4, \end{array}\right. \\ y > 0, \end{cases} \quad y = 4/3.$$

Остается решить уравнение

$\sqrt{(2x+2)/(x+2)} = 4/3.$

$(2x+2)/(x+2) = 16/9,\ x = 7.$

<u>Ответ</u>: 7.

№ 32. Решите уравнение $x - \sqrt{x/(x-3)} = 2/(x-3)$.

<u>Решение</u>:

ООУ: $x/(x-3) \geqslant 0$,

$x \in (-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$

(рис. 66).

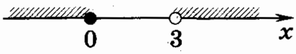


Рис. 66

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x > 3$.

Умножим обе части уравнения на $x - 3 > 0$:

$x(x-3) - (x-3)\sqrt{x/(x-3)} = 2,$

$x(x-3) - \sqrt{x(x-3)} - 2 = 0.$

Вводим новую переменную $y = \sqrt{x(x-3)}$, где $y > 0$.

Решаем систему $\begin{cases} y^2 - y - 2 = 0, \\ y > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = -1, \end{array}\right. \\ y > 0, \end{cases}$ $y = 2.$

И далее: $\begin{cases} \sqrt{x(x-3)} = 2, \\ x > 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ x > 3, \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -1, \end{array}\right. \\ x > 3, \end{cases}$

$x = 4.$

2) Пусть теперь $x \leqslant 0$. В этом случае $x - 3 < 0$. Тогда от уравнения $x(x-3) - (x-3)\sqrt{x/(x-3)} = 2$ переходим к уравнению $x(x-3) + \sqrt{x(x-3)} = 2$.

Пусть $y = \sqrt{x(x-3)}$, где $y \geqslant 0$:

$\begin{cases} y^2 + y = 2, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 + y - 2 = 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = -2, \\ y = 1, \end{array}\right. \\ y \geqslant 0, \end{cases}$ $y = 1.$

$\begin{cases} \sqrt{x(x-3)} = 1, \\ x \leqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 3x - 1 = 0, \\ x \leqslant 0, \end{cases}$

$x = (3 - \sqrt{13})/2.$

<u>Ответ</u>: $(3 - \sqrt{13})/2; 4.$

№ 33. Решите уравнение $x + 3 - x\sqrt{x + 3} - 2x^2 = 0.$

<u>Решение</u>.

ООУ: $x \geqslant -3.$

Учитывая, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения, разделим обе части его на $x^2 \neq 0$:

$(x + 3)/x^2 - \sqrt{x + 3}/x - 2 = 0.$

Обозначим $\sqrt{x + 3}/x = t.$

Решим теперь уравнение $t^2 - t - 2 = 0$, $\left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 2. \end{array}\right.$ Остается решить совокупность двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x + 3} = -x, \\ \sqrt{x + 3} = 2x. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 3 = x^2, \\ -3 \leqslant x < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3 = 4x^2, \\ x > 0, \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - x - 3 = 0, \\ -3 \leqslant x < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^2 - x - 3 = 0, \\ x > 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = (1 + \sqrt{13})/2, \\ x = (1 - \sqrt{13})/2, \end{array}\right. \\ -3 \leqslant x < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -3/4, \end{array}\right. \\ x > 0, \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = (1 - \sqrt{13})/2, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

<u>Ответ</u>: $(1 - \sqrt{13})/2; 1.$

№ 34. Решите уравнение

$\sqrt{y^2 + 4y + 8} + \sqrt{y^2 + 4y + 4} = \sqrt{2(y^2 + 4y + 6)}.$

<u>Решение</u>.

ООУ: R.

Пусть $y + 2 = t$. Тогда переходим к уравнению $\sqrt{t^2 + 4} + \sqrt{t^2} = \sqrt{2(t^2 + 2)}$. Возведем обе части последнего уравнения в квадрат (т. II):

$t^2 + 4 + 2\sqrt{t^2(t^2 + 4)} + t^2 = 2t^2 + 4$, $t^2(t^2 + 4) = 0$, $t = 0.$

И далее: $y = -2$.

Проще: $y^2 + 4y + 6 = t$, $t > 0$. Тогда

$\sqrt{t+2} + \sqrt{t-2} = \sqrt{2t}$, $2\sqrt{t^2-4} = 0$, $t = 2$, $y = -2$.

Ответ: -2.

№ 35. Решите уравнение

$8(\sqrt{x-2} - \sqrt{12-x})/(\sqrt{x-2} + \sqrt{12-x}) = x - 7$.

Решение.

ООУ: $2 \leqslant x \leqslant 12$.

Заметим, что $x = 7$ — решение данного уравнения. Пусть теперь $x \neq 7$. Освободимся от иррациональности в знаменателе левой части уравнения:

$8(5 - \sqrt{-x^2 + 14x - 24})/(x - 7) = x - 7$,

$8(5 - \sqrt{25 - (x-7)^2}) = (x-7)^2$.

Пусть $\sqrt{25-(x-7)^2} = t$, где $0 \leqslant t < 5$. Откуда $(x-7)^2 = 25 - t^2$. Получим уравнение $25 - t^2 = 40 - 8t$, $t^2 - 8t + 15 = 0$, $\left[\begin{array}{l} t = 3, \\ t = 5. \end{array}\right.$ Решив уравнение

$\sqrt{25-(x-7)^2} = 3$, находим еще два корня: 3 и 11.

Ответ: 3; 7; 11.

№ 36. Решите уравнение

$\sqrt{(1 + 2x\sqrt{1-x^2})/2} + 2x^2 = 1$.

Решение.

1 способ. Пусть $2x\sqrt{1-x^2} = t$. Тогда $t^2 = 4x^2 \times (1 - x^2)$, $4x^2 - 4x^4 = t^2$, $-4x^2 + 4x^4 = -t^2$, $1 - 4x^2 + 4x^4 = 1 - t^2$, $(1 - 2x^2)^2 = 1 - t^2$, $|1 - 2x^2| = \sqrt{1-t^2}$. Переписав данное уравнение в виде $\sqrt{(1 + 2x\sqrt{1-x^2})/2)} = 1 - 2x^2$, мы видим, что оно имеет решения, если $1 - 2x^2 \geqslant 0$. Поэтому

$1-2x^2=\sqrt{1-t^2}$. Теперь достаточно решить уравнение $\sqrt{(1+t)/2}=\sqrt{1-t^2}$:

$(1+t)/2=1-t^2,\quad 2t^2+t-1=0,\quad \left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=1/2. \end{array}\right.$

И далее: $\left[\begin{array}{l} 2x\sqrt{1-x^2}=-1, \\ 2x\sqrt{1-x^2}=1/2, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x^2\leqslant 1/2,\ x<0, \\ 4x^2-4x^4=1, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x^2\leqslant 1/2,\ x>0, \\ 4x^2-4x^4=1/4, \end{array}\right. \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x<0, \\ x^2\leqslant 1/2, \\ (2x^2-1)^2=0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x>0, \\ x^2\leqslant 1/2, \\ 16x^4-16x^2+1=0. \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x<0, \\ x^2=1/2, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x>0, \\ x^2\leqslant 1/2, \\ \left[\begin{array}{l} x^2=(2-\sqrt{3})/4, \\ x^2=(2+\sqrt{3})/4, \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2}/2, \\ \left\{\begin{array}{l} x>0, \\ x^2=(2-\sqrt{3})/4, \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2}/2, \\ x=\sqrt{2-\sqrt{3}}/2. \end{array}\right.$$

<u>Ответ</u>: $-\sqrt{2}/2$; $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$.

<u>2 способ</u>. Пусть $x=\sin\alpha$, где $|x|\leqslant 1$. Тогда данное уравнение примет вид

$\sqrt{(1+2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha})/2}+2\sin^2\alpha-1=0$. Решаем его: $\sqrt{(1+2\sin\alpha|\cos\alpha|)/2}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$. Рассмотрим два случая:

1) $\cos\alpha=0$: $\sqrt{1/2}=-1$. Решений нет.

2) $\cos\alpha\neq 0$:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha>0, \\ \sqrt{1+\sin 2\alpha}=\sqrt{2}\cos 2\alpha, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha<0, \\ \sqrt{1-\sin 2\alpha}=\sqrt{2}\cos 2\alpha; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos\alpha > 0,\\ \cos 2\alpha \geqslant 0,\\ 1+\sin 2\alpha = 2\cos^2 2\alpha,\end{cases}\\ \begin{cases}\cos\alpha < 0,\\ \cos 2\alpha \geqslant 0,\\ 1-\sin 2\alpha = 2\cos^2 2\alpha;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos\alpha > 0,\\ \cos 2\alpha \geqslant 0,\\ 2\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha - 1 = 0,\end{cases}\\ \begin{cases}\cos\alpha < 0,\\ \cos 2\alpha \geqslant 0,\\ 2\sin^2 2\alpha - \sin 2\alpha - 1 = 0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha > 0,\\ \cos 2\alpha \geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha = -1,\\ \sin 2\alpha = 1/2,\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad (1)\\ \left\{\begin{array}{l}\cos\alpha < 0,\\ \cos 2\alpha \geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha = 1,\\ \sin 2\alpha = -1/2.\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad (2)\end{array}\right.$$

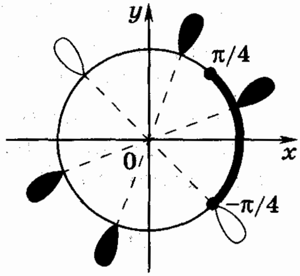


Рис. 67

Решаем систему (1):

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha > 0,\\ -\pi/2 + 2\pi k \leqslant 2\alpha \leqslant \pi/2 + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ \left[\begin{array}{l}2\alpha = -\pi/2 + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ 2\alpha = \pi/6 + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z},\\ 2\alpha = 5\pi/6 + 2\pi l,\ l\in\mathbb{Z},\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha > 0,\\ -\pi/4 + \pi k \leqslant \alpha \leqslant \pi/4 + \pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ \left[\begin{array}{l}\alpha = -\pi/4 + \pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ \alpha = \pi/12 + \pi m,\ m\in\mathbb{Z},\\ \alpha = 5\pi/12 + \pi l,\ l\in\mathbb{Z},\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}-\pi/4 + 2\pi k \leqslant \alpha \leqslant \pi/4 + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ \left[\begin{array}{l}\alpha = -\pi/4 + \pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ \alpha = \pi/12 + \pi m,\ m\in\mathbb{Z},\\ \alpha = 5\pi/12 + \pi l,\ l\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{array}\right. \text{(рис. 67)},$$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha = \pi/12 + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z},\\ \alpha = -\pi/4 + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Аналогично решим систему (2):

$$\begin{cases} \cos\alpha < 0, \\ -\pi/4 + \pi k \leqslant \alpha \leqslant \pi/4 + \pi k,\ k \in Z, \\ \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 1, \\ \sin 2\alpha = -1/2; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\pi/4 + 2\pi k \leqslant \alpha \leqslant 5\pi/4 + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \left[\begin{array}{l} \alpha = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z, \\ \alpha = -\pi/12 + \pi m,\ m \in Z, \text{ (рис. 68)}, \\ \alpha = -5\pi/12 + \pi l,\ l \in Z. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = 5\pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z, \\ \alpha = 11\pi/12 + 2\pi m,\ m \in Z. \end{array}\right.$$

А теперь изобразим точки, соответствующие множествам решений систем (1) и (2) на одной окружности (рис. 69).

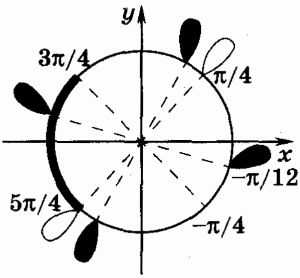


Рис. 68

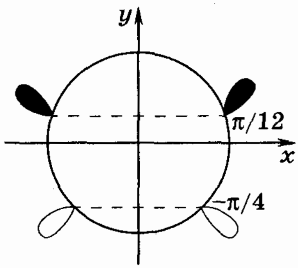


Рис. 69

Откуда

$$\left[\begin{array}{l} x = \sin(\pi/12), \\ x = -\sin(\pi/4), \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4, \\ x = -\sqrt{2}/2. \end{array}\right.$$

Заметим, что $\sin(\pi/12) = \sin 15^\circ$ можно посчитать, воспользовавшись тем, что $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$ или $\sin(\pi/12) = \sqrt{(1 - (\cos\pi/6))/2}$.

1.3.7. Применение свойств радикалов

№ 37. Решите уравнение

$$(x-2)\sqrt{x + \sqrt{x-4}} = \sqrt{x^2 - x + 4}.$$

Решение.

ООУ: $x \geqslant 4$.

В области определения данного уравнения верно равенство

$$\sqrt{x^2 - x + 4} = \sqrt{x - \sqrt{x-4}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x-4}}.$$

Тогда данное уравнение примет вид

$$(x-2)\sqrt{x + \sqrt{x-4}} = \sqrt{x - \sqrt{x-4}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x-4}},$$

$$x - 2 = \sqrt{x - \sqrt{x-4}},\ (x-2)^2 = x - \sqrt{x-4},$$

$$\sqrt{x-4} = -x^2 + 5x - 4,\ \sqrt{x-4} = -(x-4)(x-1).$$

$$\sqrt{x-4} = (1-x)(x-4).$$

В ООУ $(1-x)(x-4) \leqslant 0$, а $\sqrt{x-4} \geqslant 0$.
Поэтому $x = 4$.

Ответ: 4.

№ 38. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 1} = (x/2 + 1)\sqrt{(x+1)/(x-1)}.$$

Решение.

ООУ: $\begin{cases} x^2 - 1 \geqslant 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

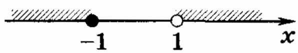


Рис. 70

$x \in (-\infty;\ -1] \cup (1;\ +\infty)$ (рис. 70).

Перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{|x-1|} \cdot \sqrt{|x+1|} = (x/2 + 1)\sqrt{|x+1|}/\sqrt{|x-1|}.$$

Последнее уравнение равносильно данному в ООУ. Переходим к совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x = -1, \\ \sqrt{|x-1|} = \dfrac{x/2 + 1}{\sqrt{|x-1|}} \end{array}\right., \qquad \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ |x-1| = x/2 + 1. \end{array}\right.$$

Уравнение $|x-1| = x/2+1$ решаем на множестве $[-2;-1] \cup (1;+\infty)$.

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x-1 = x/2+1, \\ x-1 = -x/2-1, \end{array}\right. \\ x \in [-2;-1] \cup (1;+\infty), \end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 0, \end{array}\right. \\ x \in [-2;-1] \cup (1;+\infty), \end{cases} \quad x = 4.$$

Ответ: -1; 4.

№ 39. Решите уравнение

$$\sqrt{4x^2+9x+5} - \sqrt{2x^2+x-1} = \sqrt{x^2-1}.$$

Решение.

$$\text{ООУ: } \begin{cases} 4x^2+9x+5 \geqslant 0, \\ 2x^2+x-1 \geqslant 0, \\ x^2-1 \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(4x+5) \geqslant 0, \\ (x+1)(2x-1) \geqslant 0, \\ (x+1)(x-1) \geqslant 0 \text{ (рис. 71).} \end{cases}$$

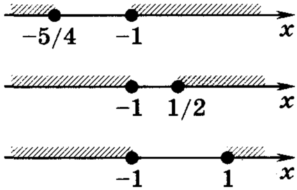


Рис. 71

Областью определения уравнения является множество $(-\infty;-5/4] \cup [1;+\infty) \cup \{-1\}$. Заметим, что $x=-1$ — корень данного уравнения. Перепишем уравнение в виде равносильного ему уравнения в ООУ:

$$\sqrt{|x+1|} \cdot \sqrt{|4x+5|} - \sqrt{|x+1|} \cdot \sqrt{|2x-1|} =$$
$$= \sqrt{|x+1|} \cdot \sqrt{|x-1|}.$$ И далее:

$$\sqrt{|x+1|} \cdot \left(\sqrt{|4x+5|} - \sqrt{|2x-1|} - \sqrt{|x-1|}\right) = 0.$$

Остается решить уравнение $\sqrt{|4x+5|} = \sqrt{|2x-1|} + \sqrt{|x-1|}$. Возведем обе части последнего уравнения в квадрат: $|4x+5| = |2x-1| + |x-1| + 2\sqrt{2x^2-3x+1}$. А теперь рассмотрим совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ 4x+5 = 2x-1+x-1+2\sqrt{2x^2-3x+1}, \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant -5/4, \\ -4x-5 = 1-2x-x+1+2\sqrt{2x^2-3x+1}, \end{cases} \end{array}\right.$$

3 – 5664

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 1,\\ 2\sqrt{2x^2-3x+1}=x+7,\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant -5/4,\\ 2\sqrt{2x^2-3x+1}=-x-7,\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 1,\\ \left[\begin{array}{l}x=5,\\ x=-9/7,\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant -7,\\ \left[\begin{array}{l}x=5,\\ x=-9/7,\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \qquad x=5.$$

Ответ: -1; 5.

1.3.8. Умножение обеих частей уравнения на сопряженное выражение

№ 40. Решите уравнение

$$(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+2x-5)=x.$$

Решение.

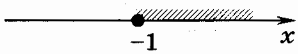


Рис. 72

ООУ: $x\geqslant -1$ (рис. 72).

Умножим обе части данного уравнения на $\sqrt{1+x}-1$. Если это выражение в ООУ обращается в 0, то полученное уравнение является следствием данного. Чтобы не делать проверку, узнаем, когда выражение $(\sqrt{1+x}-1)$ станет равно нулю: $\sqrt{1+x}-1=0$, $x=0$. Легко видеть, что $x=0$ не является корнем данного уравнения. Поэтому исходное уравнение в ООУ равносильно системе

$$\begin{cases}x\neq 0,\\ x(\sqrt{1+x}+2x-5)=x(\sqrt{1+x}-1).\end{cases}$$

И далее: $\begin{cases}x\neq 0,\\ 2x-5=-1,\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x\neq 0,\\ x=2,\end{cases}$ $\quad x=2.$

Ответ: 2.

№ 41. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$$

Решение.

ООУ: R.

Умножим обе части уравнения на выражение $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}$, которое обращается в 0 при $x = 0$, не являющемся корнем данного уравнения. Получим систему

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 6x = 3x(\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5}), \end{cases}$$

равносильную исходному уравнению на множестве R:

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ \sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 2. \end{cases}$$

Присоединим к этой системе данное уравнение:

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ \sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 2, \\ \sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x. \end{cases}$$

Сложим почленно обе части уравнений:

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ \sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x, \\ 2\sqrt{2x^2 + 3x + 5} = 2 + 3x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x \geqslant -2/3, \\ \sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x, \\ 4(2x^2 + 3x + 5) = 4 + 12x + 9x^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x \geqslant -2/3, \\ \sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x, \\ \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -4, \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4, \\ \sqrt{32 + 12 + 5} + \sqrt{32 - 12 + 5} = 12. \end{cases}$$

Ответ: 4.

Анализируя процесс решения уравнения, мы видим, что фактически пришлось проверить $x = 4$ подстановкой в данное уравнение. Дело в том, что при почленном сложении обеих частей уравнений получается уравнение-следствие.

1.3.9. Сведение к системе уравнений

№ 42. Решите уравнение $\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x^2-16}=1$.

Решение.

Пусть $\sqrt{x^2-9}=u$, где $u \geqslant 0$; $\sqrt{x^2-16}=v$, где $v \geqslant 0$. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} u-v=1, \\ u^2-v^2=7, \end{cases} \quad \begin{cases} u-v=1, \\ (u+v)(u-v)=7, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u-v=1, \\ u+v=7, \end{cases} \quad \begin{cases} u=4, \\ v=3. \end{cases}$$

Достаточно теперь решить уравнение

$$\sqrt{x^2-9}=4: \quad x^2=25, \quad x=\pm 5.$$

Ответ: -5; 5.

№ 43. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

Решение.

Пусть $\sqrt[3]{x+34}=u$, $\sqrt[3]{x-3}=v$. Составим систему

$$\begin{cases} u-v=1, \\ u^3-v^3=37, \end{cases} \quad \begin{cases} u-v=1, \\ u^2+uv+v^2=37, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u-v=1, \\ (u-v)^2+3uv=37, \end{cases} \quad \begin{cases} u-v=1, \\ uv=12, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=v+1, \\ v^2+v-12=0, \end{cases} \quad \begin{cases} u=v+1, \\ \left[\begin{array}{l} v=-4, \\ v=3, \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-3, \\ v=-4, \end{cases} \\ \begin{cases} u=4, \\ v=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Переходим к уравнениям относительно x:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x-3}=-4, \\ \sqrt[3]{x-3}=3, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-61, \\ x=30. \end{array}\right.$$

Ответ: -61; 30.

№ 44. Решите уравнение $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$.

Решение.

Пусть $\sqrt[3]{12-x}=u$, $\sqrt[3]{14+x}=v$: $\begin{cases} u+v=2, \\ u^3+v^3=26. \end{cases}$

Вводим еще одну замену: $\begin{cases} u+v=\sigma_1, \\ uv=\sigma_2. \end{cases}$

Получим систему

$$\begin{cases} \sigma_1=2, \\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=26, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1=2, \\ 8-6\sigma_2=26, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1=2, \\ \sigma_2=-3. \end{cases}$$

И далее: $\begin{cases} u+v=2, \\ uv=-3. \end{cases}$ Составляем квадратное уравнение

$$t^2-2t-3=0: \qquad \left[\begin{array}{l} t=3, \\ t=-1, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=3, \\ v=-1, \end{cases} \\ \begin{cases} u=-1, \\ v=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решаем теперь совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{12-x}=3, \\ \sqrt[3]{12-x}=-1, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 12-x=27, \\ 12-x=-1, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=-15, \\ x=13. \end{array}\right.$$

Ответ: -15; 13.

№ 45. Решите уравнение $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{15+x}=2$.

Решение.

Пусть $\sqrt[4]{1-x}=u$, где $u\geqslant 0$, $\sqrt[4]{15+x}=v$, где $v\geqslant 0$.

Составляем систему уравнений $\begin{cases} u+v=2, \\ u^4+v^4=16. \end{cases}$

Вводим обозначения:

$$\begin{cases} u+v=\sigma_1, \\ uv=\sigma_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1=2, \\ \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=16, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1=2, \\ 16-16\sigma_2+2\sigma_2^2=16, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1=2, \\ \sigma_2^2-8\sigma_2=0, \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sigma_1 = 2,\\ \sigma_2 = 0,\end{cases}\\ \begin{cases}\sigma_1 = 2,\\ \sigma_2 = 8,\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u + v = 2,\\ uv = 0,\end{cases}\\ \begin{cases}u + v = 2,\\ uv = 8,\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u = 0,\\ v = 2,\end{cases}\\ \begin{cases}u = 2,\\ v = 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Система $\begin{cases}u + v = 2,\\ uv = 8\end{cases}$ действительных решений не имеет. Завершаем решением совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{1 - x} = 0,\\ \sqrt[4]{1 - x} = 2,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = 1,\\ x = -15.\end{array}\right.$$

Ответ: -15; 1.

№ 46. Решите уравнение

$$x + \sqrt{17 - x^2} + x\sqrt{17 - x^2} = 9.$$

Решение.

Обозначим $u = x$, $v = \sqrt{17 - x^2}$, где $v \geqslant 0$.

$\begin{cases}u + v + uv = 9,\\ u^2 + v^2 = 17.\end{cases}$ Пусть $\begin{cases}u + v = \sigma_1,\\ uv = \sigma_2.\end{cases}$

Тогда переходим к системе

$$\begin{cases}\sigma_1 + \sigma_2 = 9,\\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 17,\end{cases} \qquad \begin{cases}\sigma_2 = 9 - \sigma_1,\\ \sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 35 = 0,\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sigma_1 = 5,\\ \sigma_2 = 4,\end{cases}\\ \begin{cases}\sigma_1 = -7,\\ \sigma_2 = 16,\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u + v = 5,\\ uv = 4,\end{cases}\\ \begin{cases}u + v = -7,\\ uv = 16.\end{cases}\end{array}\right.$$

Вторая система действительных корней не имеет. Запишем решения первой системы:

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u = 4,\\ v = 1,\end{cases}\\ \begin{cases}u = 1,\\ v = 4.\end{cases}\end{array}\right.$ И далее: $\left[\begin{array}{l}x = 4,\\ x = 1.\end{array}\right.$

Ответ: 1; 4.

№ 47. Решите уравнение $x + x/\sqrt{x^2-1} = 35/12$.

Решение.

Пусть $u = x$, $v = x/\sqrt{x^2-1}$, где $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$. Найдем $u^2 + v^2$;

$u^2 + v^2 = x^2 + x^2/(x^2-1) = x^4/(x^2-1) = u^2 \cdot v^2$.

Получим систему $\begin{cases} u + v = 35/12, \\ u^2 + v^2 = u^2v^2. \end{cases}$

Обозначим $\begin{cases} u + v = \sigma_1, \\ uv = \sigma_2. \end{cases}$ Перейдем к системе

$$\begin{cases} \sigma_1 = 35/12, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \sigma_2^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = 35/12, \\ \sigma_2^2 + 2\sigma_2 - 1225/144 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 35/12, \\ \left[\begin{aligned} \sigma_2 &= 25/12, \\ \sigma_2 &= -49/12, \end{aligned}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} u + v = 35/12, \\ uv = 25/12, \end{cases} \quad (1) \\ &\begin{cases} u + v = 35/12, \\ uv = -49/12; \end{cases} \quad (2) \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} u = 5/3, \\ v = 5/4, \end{cases} \\ &\begin{cases} u = 5/4, \\ v = 5/3. \end{cases} \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} x &= 5/3, \\ x &= 5/4. \end{aligned}\right.$$

Система (2) имеет решения, но u и v разных знаков.

Ответ: 5/3; 5/4.

Замечание. Данное уравнение может быть решено и путем возведения обеих частей его в квадрат, учитывая, что на множестве $(1; +\infty)$ получим уравнение, равносильное данному. А уравнение $x^4/(x^2-1) + 2x^2/\sqrt{x^2-1} = 1225/144$ уже легко решается методом замены переменных, если обозначить $z = x^2/\sqrt{x^2-1}$, где $z > 0$.

1.3.10. Использование свойств функций

Есть немало иррациональных уравнений, которые не решаются приемами, разобранными нами ранее. Приходится искать искусственные приемы. А иногда бывает полезным использовать знание области определения и области значений функций, входящих в уравнение, а также такие их свойства, как монотонность, ограниченность и т. д.

№ 48. Решите уравнение $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x-1} = -2$.

Решение.

Легко видеть, что $x = 0$ — корень данного уравнения. В левой части уравнения стоит функция, являющаяся суммой двух возрастающих функций, а потому и сама возрастает на множестве R. Следовательно, каждое свое значение она принимает только один раз. Значит, других решений, кроме $x = 0$, данное уравнение не имеет.

Ответ: 0.

№ 49. Решите уравнение $\sqrt[4]{2x-1} = \sqrt[3]{2-x}$.

Решение.

ООУ: $x \geqslant 1/2$ (рис. 73).

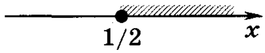


Рис. 73

Функция $y = \sqrt[4]{2x-1}$ возрастает в ООУ; а $y = \sqrt[3]{2-x}$ — убывает. Поэтому данное уравнение может иметь не более одного корня, значение которого в данном случае легко подбирается: $x = 1$.

Ответ: 1.

№ 50. Решите уравнение $6x + x^2 - x^3 - \sqrt{\cos \pi x - 1} = 0$.

Решение.

ООУ: $\cos \pi x \geqslant 1$, $\cos \pi x = 1$, $\pi x = 2\pi k$, $k \in Z$, $x = 2k$, $k \in Z$. Тогда получим уравнение $6x + x^2 - x^3 = 0$:

$$x(6 + x - x^2) = 0, \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Ответ: -2; 0.

№ 51. Решите уравнение $\sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2+4} = 5 - x^2$.

Решение.

ООУ: R.

Заметим, что $\sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2+4} \geqslant \sqrt{9} + \sqrt{4} = 5$. В это же время $5 - x^2 \leqslant 5$. Следовательно, левая и правая части данного уравнения могут быть равны, если они одновременно равны 5. Поэтому единственным решением исходного уравнения является $x = 0$.

Ответ: 0.

№ 52. Решите уравнение

$$x\sqrt{x^2+2} + (x+2)\sqrt{x^2+4x+6} = 0.$$

Решение.

ООУ: R.

Перепишем данное уравнение в виде

$$x\sqrt{x^2+2} + (x+2)\sqrt{(x+2)^2+2} = 0.$$

Введем вспомогательную функцию $f(t) = t\sqrt{t^2+2}$. Тогда данное уравнение представится в виде $f(x) + f(x+2) = 0$ (1). Легко видеть, что $f(t)$ — нечетная функция. Поэтому $f(-x) = -f(x)$, если $x \in$ R. И тогда уравнение (1) можно записать так: $f(x+2) = f(-x)$ (2). А теперь докажем, что функция $f(t)$ монотонно возрастает:

$$f'(t) = \left(t(t^2+2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \sqrt{t^2+2} + 2t^2/(2\sqrt{t^2+2}) =$$

$$= 2(t^2+1)/\sqrt{t^2+2};$$

$f'(t) > 0$, где $t \in$ R. Из уравнения (2) следует, учитывая возрастание функции $f(t)$, что $x + 2 = -x$. Значит, $x = -1$.

Ответ: -1.

1.3.11. Иррациональные уравнения, содержащие кубические корни

№ 53. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$.

Решение.

Данное уравнение можно решить несколькими способами. В 1.3.9 мы его уже решили сведением к системе уравнений. Рассмотрим другие приемы.

2 способ. Возведем обе части уравнения в третью степень, воспользовавшись формулой

$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

Тогда получим

$x + 34 - x + 3 - 3\sqrt[3]{(x + 34)(x - 3)}\ \times$

$\times(\sqrt[3]{x + 34} - \sqrt[3]{x - 3}) = 1$.

Разность корней заменим числом 1, учитывая данное уравнение. Заметим, что такая замена приводит к уравнению-следствию, а потому необходима проверка.

$37 - 3\sqrt[3]{(x + 34)(x - 3)} = 1$,

$\sqrt[3]{(x + 34)(x - 3)} = 12$,

$x^2 + 31x - 1830 = 0$,

$\left[\begin{array}{l} x = -61, \\ x = 30. \end{array}\right.$

Проверкой убеждаемся, что −61 и 30 — корни данного уравнения.

Ответ: −61; 30.

3 способ. Уединим радикал $\sqrt[3]{x + 34}$:

$\sqrt[3]{x + 34} = 1 + \sqrt[3]{x - 3}$.

Возведем обе части полученного уравнения в куб:

$x + 34 = 1 + 3\sqrt[3]{x - 3} + 3\sqrt[3]{(x - 3)^2} + x - 3$,

$\sqrt[3]{(x - 3)^2} + \sqrt[3]{x - 3} - 12 = 0$,

$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x - 3} = -4, \\ \sqrt[3]{x - 3} = 3, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -61, \\ x = 30. \end{array}\right.$

В этом случае проверка не нужна.

При решении иррациональных уравнений, содержащих кубические (и другие) корни, применяются и приемы, указанные для уравнений с квадратными корнями: замены, сведения к системе и др.

№ 54. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{4x^2+10x+4}+\sqrt[3]{2x^2-5x-3}=\sqrt[3]{2x+1}.$$

Решение.

ООУ: R.

Преобразовав подкоренные выражения, перейдем к равносильному уравнению

$$\sqrt[3]{(2x+1)(2x+4)}+\sqrt[3]{(2x+1)(x-3)}=\sqrt[3]{2x+1}:$$

$$\sqrt[3]{2x+1}\cdot\sqrt[3]{2x+4}+\sqrt[3]{2x+1}\cdot\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{2x+1};$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-1/2; \\ \sqrt[3]{2x+4}+\sqrt[3]{x-3}=1. \end{array}\right.$$

Решаем второе уравнение совокупности:

$$2x+4+x-3+3\sqrt[3]{(2x+4)(x-3)}=1;$$

$$\sqrt[3]{2x^2-2x-12}=-x,\ 2x^2-2x-12=-x^3,$$

$$x^3+2x^2-2x-12=0.$$

Понизим степень последнего уравнения, воспользовавшись схемой Горнера:

	1	2	–2	–12
2	1	4	6	0

Объясним, как с ней работать: в верхней строке таблицы выписываются коэффициенты многочлена левой части уравнения (по убыванию степеней). Слева от вертикали во второй строке запишем корень уравнения 2, который мы нашли подбором.
Первое число верхней строки сносится вниз.
Находим второе нижнее число (под 2). Для этого 2 (корень) умножаем на предыдущее нижнее и прибавляем верхнее: $2\cdot1+2=4$.
Третье нижнее: $2\cdot4+(-2)=6$.
Четвертое нижнее: $2\cdot6+(-12)=0$.
1, 4 и 6 — коэффициенты квадратного уравнения $x^2+4x+6=0$.

Получим совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x^2 + 4x + 6 = 0, \end{array}\right.$ второе уравнение которой не имеет действительных корней. Проверкой убеждаемся, что $x = 2$ — корень данного уравнения.

Ответ: $-1/2$; 2.

№ 55. Решите уравнение $\sqrt[3]{1 + x} = \sqrt{x - 3}$.

Решение.

ООУ: $x \geqslant 3$.

Сведем к системе уравнений, введя обозначения: $\sqrt[3]{x + 1} = u$, $\sqrt{x - 3} = v$, где $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$.

$\begin{cases} u = v, \\ u^3 - v^2 = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} u = v, \\ u^3 - u^2 - 4 = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} u = v, \\ (u - 2)(u^2 + u + 2) = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} v = 2, \\ u = 2. \end{cases}$

И далее: $\sqrt{x - 3} = 2$, $x = 7$.

Ответ: 7.

№ 56. Решите уравнение $(3x + 2)\sqrt[3]{x + 1} = 8\sqrt[3]{3}$.

Решение.

Легко догадаться, что $x = 2$ — корень данного уравнения. Учитывая, что функция

$f(x) = (3x + 2)\sqrt[3]{x + 1}$

возрастает на множестве R, делаем вывод, что других корней нет.

Ответ: 2.

№ 57. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{(2 - x)^2} + \sqrt[3]{(7 + x)^2} - \sqrt[3]{(7 + x)(2 - x)} = 3.$$

Решение.

Пусть $\sqrt[3]{2 - x} = u$, $\sqrt[3]{7 + x} = v$. Тогда переходим к системе

$\begin{cases} u^2 + v^2 - uv = 3, \\ u^3 + v^3 = 9. \end{cases}$ Обозначим: $\begin{cases} u + v = \sigma_1, \\ uv = \sigma_2. \end{cases}$

Решаем систему

$\begin{cases} \sigma_1^2 - 3\sigma_2 = 3, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 9, \end{cases}$ $\begin{cases} \sigma_1^2 - 3\sigma_2 = 3, \\ \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = 9, \end{cases}$ $\begin{cases} \sigma_2 = 2, \\ \sigma_1 = 3. \end{cases}$

И далее:

$\sqrt[3]{2-x} \cdot \sqrt[3]{7+x} = 2,$ $x^2 + 5x - 6 = 0,$ $\left[\begin{array}{l} x = -6, \\ x = 1. \end{array}\right.$

Ответ: –6; 1.

№ 58. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt[3]{7-x} - \sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{x-5}} = 6 - x.$

Решение.

ООУ: R.

Один корень уравнения находится подбором: $x = 5$.

Пусть теперь $x \neq 5$: $\left(\sqrt[3]{\dfrac{7-x}{x-5}} - 1\right) \Big/ \left(\sqrt[3]{\dfrac{7-x}{x-5}} + 1\right) =$ $= 6 - x$. Обозначим: $\sqrt[3]{(7-x)/(x-5)} = z$. А теперь $(6 - x)$ выразим через z: $(7 - x)/(x - 5) = z^3$,

$\dfrac{(6-x)+1}{-(6-x)+1} = z^3,$ $(6 - x)(1 + z^3) = z^3 - 1,$

$6 - x = (z^3 - 1)/(z^3 + 1)$. Данное уравнение сводится к уравнению относительно z:

$(z - 1)/(z + 1) = (z^3 - 1)/(z^3 + 1),$

$\begin{cases} z \neq -1, \\ (z-1)(z^2 - z + 1) = z^3 - 1, \end{cases}$

$\begin{cases} z \neq -1, \\ (z-1) \cdot z = 0, \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} z = 1, \\ z = 0, \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{(7-x)/(x-5)} = 0, \\ \sqrt[3]{(7-x)/(x-5)} = 1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 7, \\ x = 6. \end{array}\right.$

Ответ: 5; 6; 7.

1.4. Иррациональные неравенства

▶ ***Определение.*** Неравенство, в котором переменная входит в какое-либо выражение, стоящее под знаком корня, называется *иррациональным неравенством с одной переменной*.

Решение иррациональных неравенств осложняется тем, что проверка, как правило, невозможна. Поэтому необходимо следить за соблюдением равносильности при переходе от одного неравенства к другому.

▶ ***Определение.*** Если всякое решение неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ (1), принадлежащее множеству M, является решением неравенства $f_2(x) > g_2(x)$ (2), а любое решение неравенства (2), принадлежащее M, является решением неравенства (1), то эти неравенства называются *равносильными на множестве* M.

Если неравенства (1) и (2) не имеют решений на множестве M, то они тоже считаются равносильными на этом множестве.

Рассмотрим несколько теорем равносильности неравенств на множестве M.

Теорема IV-а. Неравенство $f(x)\cdot\varphi(x)\geqslant 0$ (3) равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x)\cdot\varphi(x)=0, \\ f(x)\cdot\varphi(x)>0 \end{array}\right.$ (4) в области определения неравенства (3).

Теорема IV-б. Неравенство $f(x)\cdot\varphi(x)\leqslant 0$ (5) равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x)\cdot\varphi(x)=0, \\ f(x)\cdot\varphi(x)<0 \end{array}\right.$ (6) в области определения неравенства (5).

Теорема V. Неравенство $f(x)>\varphi(x)$ (7) равносильно неравенству $f^{2n}(x)>\varphi^{2n}(x)$, $n\in\mathrm{N}$ (8), на множестве решений системы неравенств $\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ \varphi(x)\geqslant 0. \end{cases}$

Аналогичные теоремы можно сформулировать и для неравенств вида: $f(x)\geqslant\varphi(x)$; $f(x)<\varphi(x)$; $f(x)\leqslant\varphi(x)$. Сделайте это самостоятельно.

Следствие 1. *Неравенство* $\sqrt[2n]{f(x)}<\varphi(x)$, $n\in\mathrm{N}$ (9), *равносильно неравенству* $f(x)<\varphi^{2n}(x)$ (10) *на множестве решений системы неравенств* $\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ \varphi(x)>0. \end{cases}$

Учитывая следствие 1, при решении неравенства (9) можно переходить сразу к системе $\begin{cases} f(x) < \varphi^{2n}(x), \\ f(x) \geqslant 0, \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$ (11), множество решений которой совпадает с множеством решений неравенства $\sqrt[2n]{f(x)} < \varphi(x)$. Система (11) равносильна неравенству (9) в области определения неравенства (9).

❑ Пример. Решите неравенство $\sqrt{x + 18} < 2 - x$.

Решение.

Данное неравенство в своей области определения равносильно системе

$$\begin{cases} x + 18 \geqslant 0, \\ 2 - x > 0, \quad \text{(следствие 1)} \\ x + 18 < (2 - x)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -18, \\ x < 2, \\ x^2 - 5x - 14 > 0 \text{ (рис. 74).} \end{cases}$$

Ответ: $[-18; -2)$.

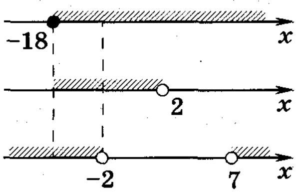


Рис. 74

Следствие 2. Неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} \leqslant \varphi(x)$, $n \in \mathrm{N}$ (12), *равносильно неравенству* $f(x) \leqslant \varphi^{2n}(x)$ (13) *на множестве решений системы неравенств* $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ \varphi(x) \geqslant 0. \end{cases}$

Другими словами, множества решений неравенства $\sqrt[2n]{f(x)} \leqslant \varphi(x)$, $n \in \mathrm{N}$, и системы $\begin{cases} f(x) \leqslant \varphi^{2n}(x), \\ f(x) \geqslant 0, \\ \varphi(x) \geqslant 0 \end{cases}$ совпадают в области определения неравенства (12).

Следствие 3. Неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} > \varphi(x)$, $n \in \mathrm{N}$ (14), *равносильно совокупности* $\left[\begin{array}{l} \varphi(x) < 0, \\ \begin{cases} f(x) > \varphi^{2n}(x), \\ \varphi(x) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$ (15) *в области определения неравенства* (14).

Чтобы учесть область определения неравенства (14), решая совокупность (15), мы вместо совокупности (15) рассмотрим совокупность систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ \varphi(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > \varphi^{2n}(x), \\ \varphi(x) \geqslant 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

(16), которая равносильна данному неравенству (14) в области его определения.

❑ Пример. Решите неравенство

$$\sqrt{x^3 - 3x - 10} > 8 - x.$$

Решение.

Достаточно решить совокупность систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geqslant 0, \\ 8 - x < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 8 - x \geqslant 0, \\ x^2 - 3x - 10 > (8 - x)^2; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geqslant 0, \\ 8 - x < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 8 - x \geqslant 0, \\ 13x > 74; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} (x - 5)(x + 2) \geqslant 0, \\ x > 8; \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 8, \\ x > 74/13 \text{ (рис. 75)}. \end{cases}\end{array}\right.$$

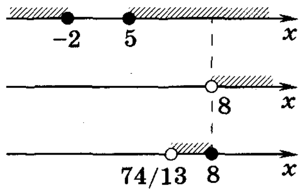


Рис. 75

Ответ: $(74/13; +\infty)$.

Следствие 4. *Неравенство* $\sqrt[2n]{f(x)} \geqslant \varphi(x)$, $n \in \mathrm{N}$, (17), *равносильно совокупности систем*

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant \varphi^{2n}(x) \end{cases}\end{array}\right. \qquad (18)$$

в области определения неравенства (17).

Следствие 5. *Неравенство* $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}$, $n \in \mathrm{N}$, (19), *в своей области определения равносильно системе*

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases} \qquad (20)$$

Следствие 5 легко распространяется и на неравенства вида $\sqrt[2n]{f(x)} \geqslant \sqrt[2n]{\varphi(x)}$, $n \in \mathbb{N}$; $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{\varphi(x)}$, $n \in \mathbb{N}$; $\sqrt[2n]{f(x)} \leqslant \sqrt[2n]{\varphi(x)}$, $n \in \mathbb{N}$. Сделайте это самостоятельно.

Теорема VI. Неравенство $f(x) > \varphi(x)$ (21) равносильно неравенству $f^{2n+1}(x) > \varphi^{2n+1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, (22), в области определения неравенства (21).

❑ Пример. Решите неравенство $\sqrt[3]{x-1} > x - 1$.

Решение.

Возводим обе части неравенства в третью степень: $x - 1 > (x - 1)^3$, $(x - 1)(x^2 - 2x) < 0$, $x(x - 1)(x - 2) < 0$ (рис. 76).

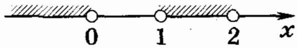


Рис. 76

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (1; 2)$.

Решая иррациональные неравенства, можно использовать те же приемы, что и при решении иррациональных уравнений: анализ области определения неравенства, возведение обеих частей неравенства в одну степень, метод замены переменных, применение свойств радикалов и т. д.

Вместе с тем мы будем пользоваться и специфическими приемами решения неравенств, например методом интервалов.

1.4.1. Подготовительные упражнения

Решите следующие неравенства (табл. 1):

Таблица 1

	Ответы
1) $\sqrt{x-1} < 0$	Решений нет
2) $\sqrt{-x} < -3$	Решений нет
3) $\sqrt{2-x} > -1$	$(-\infty; 2]$

Продолжение табл. 1

	Ответы:
4) $\sqrt{x+2} \leqslant -(x+2)^2$	-2
5) $\sqrt{\lvert x\rvert} \geqslant 0$	R
6) $\sqrt{\lvert x-1\rvert} > 0$	$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$
7) $\sqrt{x-2} \geqslant x-2-\lvert x-2\rvert$	$[2; +\infty)$
8) $\sqrt{x^2} \geqslant x$	R
9) $\sqrt{x^2} \geqslant -x$	R
10) $\sqrt{(x-1)(x-3)} \geqslant \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{3-x}$	$(-\infty; 1]$
11) $\sqrt{(x-1)(x-3)} \geqslant \sqrt{(x-1)} \cdot \sqrt{x-3}$	$[3; +\infty)$
12) $x\sqrt{x+5} \geqslant 0$	$\{-5\} \cup [0; +\infty)$
13) $(x-1)\sqrt{x-3} \leqslant 0$	3
14) $(x+1)^2 \cdot \sqrt{x-1} \geqslant 0$	$[1; +\infty)$
15) $\sqrt[6]{x^2} \geqslant \sqrt[3]{x}$	R
16) $\sqrt[6]{x^2} > \sqrt[3]{-x}$	$(0; +\infty)$
17) $\sqrt{\sin x - 1} < (x-\pi/2)^2$	$\pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$, $k \neq 0$
18) $\sqrt{1-\cos x} \geqslant \sqrt{2}$	$\pi + 2\pi n$, $n \in Z$
19) $\log_2 x \cdot \sqrt{x-2} \geqslant 0$	$[2; +\infty)$

Окончание табл. 1

	Ответы
20) $\log_3(x-1)\sqrt{x-3} < 0$	Решений нет
21) $\sqrt{x-2} < 1$	$[2; 3)$
22) $\sqrt{1-x} \leqslant 2$	$[-3; 1]$
23) $\sqrt{2x-3} > 5$	$(14; +\infty)$
24) $\sqrt{1-2x} \geqslant 7$	$(-\infty; -24]$

1.4.2. Анализ области определения неравенства

№ 1. Найдите целое число, удовлетворяющее неравенству $2\sqrt{2x+1} > 3\sqrt{-x^2-x+6}$.

Решение.

Область определения неравенства (ООН):

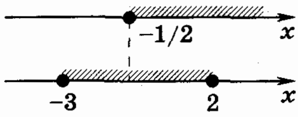


Рис. 77

$$\begin{cases} 2x+1 \geqslant 0, \\ -x^2-x+6 \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -1/2, \\ x^2+x-6 \leqslant 0 \text{ (рис. 77)}, \end{cases}$$

$x \in [-1/2; 2]$.

Нам остается проверить каждое из целых чисел отрезка $[-1/2; 2]$, т. е. числа 0; 1; 2.

Ответ: 2.

№ 2. Решите неравенство $\sqrt{x-8} > 2-x$.

Решение.

ООН: $x \geqslant 8$.

Легко видеть, что правая часть неравенства в ООН принимает только отрицательные значения, а левая — неотрицательные.

Ответ: $[8; +\infty)$.

№ 3. Решите неравенство

$$\sqrt{-x^2+5x-6} < \sqrt{x-3} + \sqrt{x^2-4x+3} + 2.$$

Решение.

ООН: $\begin{cases} -x^2+5x-6 \geqslant 0, \\ x \geqslant 3, \\ x^2-4x+3 \geqslant 0, \end{cases}$ $\quad x = 3.$

Итак, область определения данного неравенства состоит из одного числа, равного 3. Проверкой убеждаемся, что $x = 3$ — решение неравенства.

Ответ: 3.

№ 4. Решите неравенство $\sqrt{x^6-1} < \dfrac{1}{1-x^2}$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} x^6-1 \geqslant 0, \\ x \neq \pm 1, \end{cases}$

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

В области определения неравенства его правая часть принимает только отрицательные значения, а $\sqrt{x^6-1}$, как арифметический корень, — только положительные. Поэтому неравенство решений не имеет.

Ответ: решений нет.

№ 5. Решите неравенство $\sqrt{1-\sqrt{1+x}} \geqslant x$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ \sqrt{1+x} \leqslant 1, \end{cases}$ $\quad -1 \leqslant x \leqslant 0$ (рис. 78).

Ответ: $[-1; 0]$.

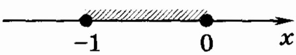


Рис. 78

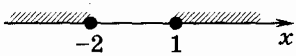


Рис. 79

№ 6. Решите неравенство $\sqrt{(x-1)(x+2)} \leqslant 1 - x^2$.

Решение.

ООН: $(x-1)(x+2) \geqslant 0$ (рис. 79).

Заметим, что выражение $(1 - x^2)$ во всех точках ООН, кроме $x = 1$, принимает отрицательные значения. Остается проверить только $x = 1$.

Ответ: 1.

№ 7. Решите неравенство

$2\sin x - 1 \leqslant \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}$.

Решение.

Найдем ООН: $6\sin^2 x - 6\sin x - 12 \geqslant 0$,

$\sin^2 x - \sin x - 2 \geqslant 0$,

$\left[\begin{array}{l}\sin x \geqslant 2,\\ \sin x \leqslant -1,\end{array}\right.$ $\sin x = -1$, $x = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$.

Легко проверить, что $x = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$, — решения данного неравенства.

Ответ: $-\pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$.

1.4.3. Простейшие иррациональные неравенства

К простейшим иррациональным неравенствам отнесем неравенства вида:

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \varphi(x),\ n \in N \qquad (1)$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} \leqslant \varphi(x),\ n \in N \qquad (2)$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \varphi(x),\ n \in N \qquad (3)$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} \geqslant \varphi(x),\ n \in N \qquad (4)$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{\varphi(x)},\ n \in N \qquad (5)$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} \geqslant \sqrt[2n]{\varphi(x)},\ n \in N \qquad (6)$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{\varphi(x)},\ n \in N \qquad (7)$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} \leqslant \sqrt[2n]{\varphi(x)},\ n \in N \qquad (8)$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > \varphi(x),\ n \in N \qquad (9)$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \varphi(x),\ n \in N \qquad (10)$$

Рассмотрим ряд упражнений.

№ 8. Решите неравенство $\sqrt{(3x-1)/(2-x)} > 1$.

Решение.

Данное неравенство в своей области определения равносильно неравенству $(3x-1)/(2-x) > 1$:

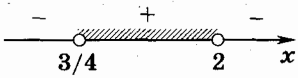


Рис. 80

$(3x-1)/(2-x) - 1 > 0$, $(4x-3)/(2-x) > 0$ (рис. 80).

Ответ: $(3/4; 2)$.

№ 9. Решите неравенство $\sqrt{x^2+2x-3} < 1$.

Решение.

Переходим к системе $\begin{cases} x^2+2x-3 \geqslant 0, \\ x^2+2x-3 < 1, \end{cases}$ множество решений которой по следствию 1 теоремы V совпадает с множеством решений данного неравенства. Решаем ее:

$\begin{cases} x^2+2x-3 \geqslant 0, \\ x^2+2x-4 < 0 \end{cases}$ (рис. 81).

Ответ: $(-1-\sqrt{5}; -3] \cup [1; -1+\sqrt{5})$.

Заметим, что данное неравенство равносильно в своей области определения полученной системе.

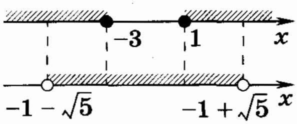


Рис. 81

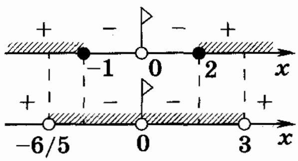


Рис. 82

№ 10. Решите неравенство $\sqrt{1-(x+2)/x^2} < 2/3$.

Решение.

Данное неравенство в своей области определения равносильно системе

$\begin{cases} (x^2-x-2)/x^2 \geqslant 0, \\ (x^2-x-2)/x^2 < 4/9, \end{cases}$ $\begin{cases} (x^2-x-2)/x^2 \geqslant 0, \\ (5x^2-9x-18)/x^2 < 0 \end{cases}$

(рис. 82).

<u>Замечание</u>: означает, что при переходе через 0 знак выражения левой части неравенства не меняется.

<u>Ответ</u>: $(-6/5; -1] \cup [2; 3)$.

№ 11. Решите неравенство $\sqrt{2x - x^2} < 5 - x$.

<u>Решение</u>.

Составим и решим систему неравенств, равносильную данному неравенству (следствие 1 из теоремы V):

$$\begin{cases} 2x - x^2 \geqslant 0, \\ 5 - x > 0, \\ 2x - x^2 < (5 - x)^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x(2 - x) \geqslant 0, \\ x < 5, \\ 2x - x^2 < 25 - 10x + x^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(2 - x) \geqslant 0, \\ x < 5, \\ 2x^2 - 12x + 25 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x(2 - x) \geqslant 0, \\ x < 5 \text{ (рис. 83).} \end{cases}$$

<u>Ответ</u>: $[0; 2]$.

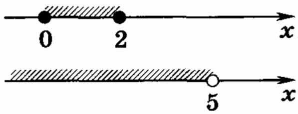


Рис. 83

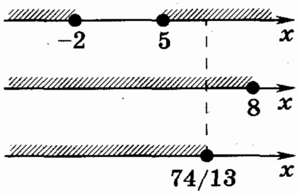


Рис. 84

№ 12. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 3x - 10} \leqslant 8 - x$.

<u>Решение</u>.

Решим систему $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geqslant 0, \\ 8 - x \geqslant 0, \\ x^2 - 3x - 10 \leqslant (8 - x)^2, \end{cases}$ равносильную данному неравенству (следствие 2 из теоремы V).

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geqslant 0, \\ x \leqslant 8, \\ 13x \leqslant 74 \text{ (рис. 84).} \end{cases}$$

<u>Ответ</u>: $(-\infty; -2] \cup [5; 74/13]$.

№ 13. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - x - 6} < |x| - 2$.

Решение.

ООН: $x^2 - x - 6 \geqslant 0$, $(x + 2)(x - 3) \geqslant 0$ (рис. 85):
$x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$.

Данное неравенство в области его определения равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant -2, \\ -x - 2 > 0, \\ x^2 - x - 6 < (-x - 2)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 3, \\ x - 2 > 0, \\ x^2 - x - 6 < (x - 2)^2. \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{Решим ее:} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant -2, \\ x < -2, \\ x > -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 3, \\ x > 2, \\ x < 10/3, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x < 10/3. \end{cases}$$

Ответ: $[3; 10/3)$.

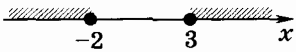


Рис. 85

Рис. 86

№ 14. Решите неравенство $\sqrt{2 - x - x^2} \leqslant |x - 3|$.

Решение.

Достаточно решить систему $\begin{cases} 2 - x - x^2 \geqslant 0, \\ 2 - x - x^2 \leqslant (x - 3)^2. \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + x - 2 \leqslant 0, \\ 2x^2 - 5x + 7 \geqslant 0, \end{cases}$ $x^2 + x - 2 \leqslant 0$ (рис. 86).

Множеством решения второго неравенства системы является R.

Ответ: $[-2; 1]$.

№ 15. Решите неравенство $\sqrt{4 - x} > x + 2$.

Решение.

Применяя следствие 3 из теоремы V, переходим к совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 2 < 0, \\ 4 - x \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ 4 - x > (x + 2)^2, \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -2, \\ x \leqslant 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x(x + 5) < 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x<-2, \\ \begin{cases} x \geqslant -2, \\ -5<x<0, \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ -2 \leqslant x<0, \end{array}\right. -\infty<x<0.$$

<u>Ответ</u>: $(-\infty; 0)$.

№ 16. Решите неравенство $\sqrt{x^2-4x} \geqslant x-3$.

<u>Решение</u>.

Установим ООН: $x^2-4x \geqslant 0$, $x(x-4) \geqslant 0$,

$x \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$ (рис. 87).

Легко видеть, что промежуток $(-\infty; 0]$ входит в множество решений данного неравенства, так как $x-3<0$ при $x \in (-\infty; 0]$. Остается решить данное неравенство на множестве $[4; +\infty)$. Возводим обе части неравенства в квадрат (теорема V):

$x^2-4x \geqslant x^2-6x+9$, $x \geqslant 4{,}5$.

<u>Ответ</u>: $(-\infty; 0] \cup [4{,}5; +\infty)$.

Решение этого неравенства показывает, что иногда не надо спешить составлять совокупность систем, решая неравенства данного типа. Анализ области определения неравенства позволяет найти более короткое решение.

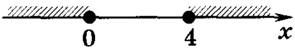


Рис. 87

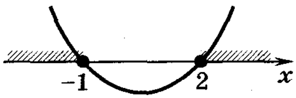


Рис. 88

№ 17. Решите неравенство $2\sqrt{x^2-x-2} \geqslant |x+1|-2$.

<u>Решение</u>.

ООН: $x^2-x-2 \geqslant 0$, $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ (рис. 88).

Раскроем модуль, учитывая ООН:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant -1, \\ 2\sqrt{x^2-x-2} \geqslant -x-3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 2, \\ 2\sqrt{x^2-x-2} \geqslant x-1, \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant -1, \\ x \geqslant -3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant -3, \\ 4(x^2-x-2) \geqslant (x+3)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 2, \\ 4(x^2-x-2) \geqslant (x-1)^2, \end{cases} \end{array}\right.$$

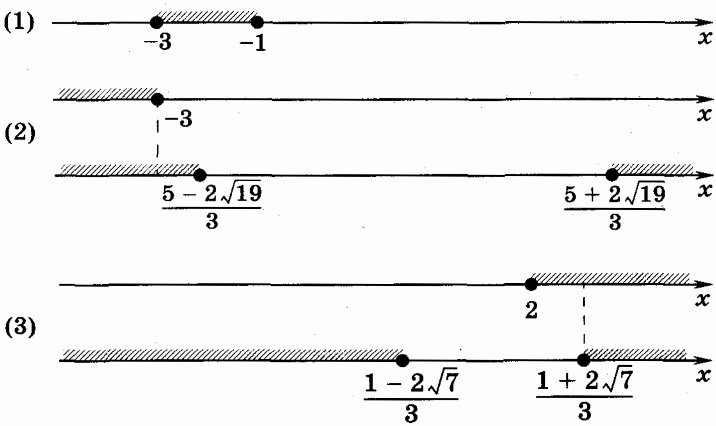


Рис. 89

$$\left[\begin{array}{l} -3 \leqslant x \leqslant -1, \\ \begin{cases} x \leqslant -3, \\ 4x^2 - 4x - 8 \geqslant x^2 + 6x + 9, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 2, \\ 4x^2 - 4x - 8 \geqslant x^2 - 2x + 1, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} -3 \leqslant x \leqslant -1, & (1) \\ \begin{cases} x \leqslant -3, \\ 3x^2 - 10x - 17 \geqslant 0, \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} x \geqslant 2, \\ 3x^2 - 2x - 9 \geqslant 0 \end{cases} & (3)\ (\text{рис. } 89). \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1 + 2\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$.

№ 18. Решите неравенство $\sqrt{3x - 10} > \sqrt{6 - x}$.

Решение.

Применив следствие 5 теоремы V, переходим к равносильной системе $\begin{cases} 3x - 10 > 6 - x, \\ 6 - x \geqslant 0: \end{cases}$ $\begin{cases} x > 4, \\ x \leqslant 6. \end{cases}$

Ответ: $(4; 6]$.

№ 19. Решите неравенство $\sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} - \sqrt{2 - x} > 0$,

Решение.

Перепишем неравенство в виде $\sqrt{4-\sqrt{1-x}} > \sqrt{2-x}$ и перейдем к равносильной системе (следствие 5, теорема V):

$\begin{cases} 4-\sqrt{1-x} > 2-x, \\ 2-x \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{1-x} < 2+x, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$

$\begin{cases} 1-x \geqslant 0, \\ 2+x > 0, \\ x \leqslant 2, \\ 1-x < 4+4x+x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x > -2, \\ x^2+5x+3 > 0 \text{ (рис. 90).} \end{cases}$

Ответ: $((-5+\sqrt{13})/2; 1]$.

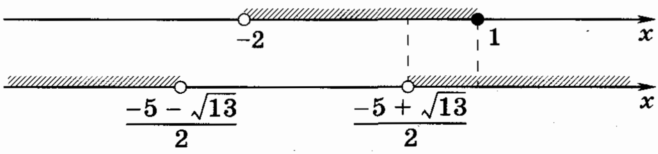


Рис. 90

№ 20. Решите неравенство $\sqrt{1+4\cos 2x} \geqslant \sqrt{1-4\cos x}$.

Решение.

Данное неравенство в своей области определения равносильно системе

$\begin{cases} 1+4\cos 2x \geqslant 1-4\cos x, \\ 1-4\cos x \geqslant 0 \end{cases}$

(следствие 5, теорема V). И далее:

$\begin{cases} \cos 2x + \cos x \geqslant 0, \\ \cos x \leqslant 1/4, \end{cases}$ $\begin{cases} 2\cos^2 x + \cos x - 1 \geqslant 0, \\ \cos x \leqslant 1/4. \end{cases}$

Пусть $\cos x = t$, где $|t| \leqslant 1$. Получим систему:

$\begin{cases} 2t^2+t-1 \geqslant 0, \\ -1 \leqslant t \leqslant 1/4 \text{ (рис. 91).} \end{cases}$

Видим, что $t=-1$; $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

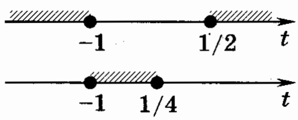


Рис. 91

1.4.4. Неравенства вида $f(x)\sqrt{\varphi(x)} \geqslant 0$, $f(x)\sqrt{\varphi(x)} \leqslant 0$, $\dfrac{\sqrt{\varphi(x)}}{f(x)} \geqslant 0$, $\dfrac{\sqrt{\varphi(x)}}{f(x)} \leqslant 0$

При решении неравенств указанного вида желательно применять теоремы IV-а и IV-б. Довольно распространенной ошибкой при решении неравенства вида $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ является сведение ее к совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ведь если $f(x_0) = 0$, то, если x_0 входит в область определения данного неравенства, знак числа $g(x_0)$ нас не интересует. Число x_0 является решением исходного неравенства.

В качестве примера рассмотрим неравенство

$$(x+3)\sqrt{x^2+4x-5} \geqslant 0.$$

Приведем пример ошибочного решения:

$$\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ x^2+4x-5 \geqslant 0 \text{ (рис. 92).} \end{cases}$$

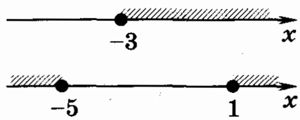


Рис. 92

В качестве ответа указывается только интервал $[1; +\infty)$, но это неверно, так как $x = -5$ тоже является решением данного неравенства.

№ 21. Решите неравенство $(x+3)\sqrt{x^2+4x-5} \geqslant 0$.

Решение.

1 способ. Данное неравенство в области его определения равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+4x-5} \cdot (x+3) = 0, \\ \sqrt{x^2+4x-5} \cdot (x+3) > 0. \end{array}\right.$$

И далее:

$$\left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=1, \\ \begin{cases} x^2+4x-5>0, \\ x>-3 \text{ (рис. 93).} \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=1, \\ x>1. \end{array}\right.$$

<u>Ответ</u>: $\{-5\} \cup [1; +\infty)$.

<u>2 способ</u>. Решим данное неравенство методом интервалов.

1. Найдем область определения ($D(y)$) функции

$$y=(x+3)\sqrt{x^2+4x-5}: \quad x^2+4x-5 \geqslant 0,$$

$$x \in (-\infty; -5] \cup [1; +\infty) \text{ (рис. 94).}$$

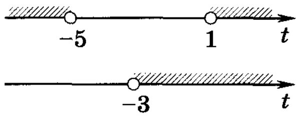


Рис. 93

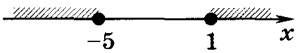


Рис. 94

2. Данная функция непрерывна на множестве $(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$ (рис. 95).

3. Найдем нули функции: $x=-3$, $x=-5$, $x=1$. Но $-3 \notin D(y)$.

4. В каждом из интервалов $(-\infty; -5)$, $(1; +\infty)$ функция сохраняет знак (рис. 96).

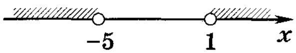


Рис. 95

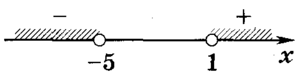


Рис. 96

Если $x>1$, то $y>0$. Если $x<-5$, то $y<0$.

5. Проверим граничные точки интервалов, входящие в $D(y)$: $y(-5)=0$, $y(1)=0$.

<u>Ответ</u>: $\{-5\} \cup [1; +\infty)$.

№ 22. Решите неравенство $(x-1)\sqrt{\dfrac{2-x}{8-x}} \geqslant 0$.

Решение.

Переходим к совокупности, равносильной данному неравенству (теорема IV-а):

$$\left[\begin{array}{l}(x-1)\sqrt{(2-x)/(8-x)}=0,\\ (x-1)\sqrt{(2-x)/(8-x)}>0.\end{array}\right.$$

И далее:

$$\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=2,\\ \left\{\begin{array}{l}x-1>0,\\ (2-x)/(8-x)>0.\end{array}\right.\end{array}\right. \quad (1) \quad \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=2,\\ 1<x<2,\\ x>8\ (\text{рис. }97).\end{array}\right.$$

Ответ: $[1;\ 2] \cup (8;\ +\infty)$.

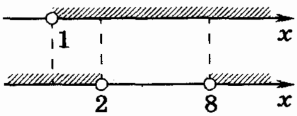


Рис. 97

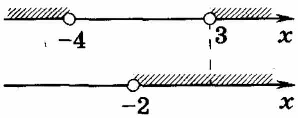


Рис. 98

№ 23. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+x-12}}{x+2} \geqslant 0$.

Решение.

Составим и решим совокупность $\left[\begin{array}{l}x^2+x-12=0,\\ \left\{\begin{array}{l}x^2+x-12>0,\\ x+2>0,\end{array}\right.\end{array}\right.$

равносильную данному неравенству (теорема IV-а)

$$\left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=3,\\ \left\{\begin{array}{l}(x+4)(x-3)>0,\\ x>-2\ (\text{рис. }98).\end{array}\right.\end{array}\right. \quad (1) \quad \left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=3,\\ x>3,\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x\geqslant 3.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-4\} \cup [3;\ +\infty)$.

№ 24. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-x-6}}{x+4} \leqslant 0$.

Решение.

Достаточно решить совокупность $\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 6 = 0, \\ \begin{cases} x^2 - x - 6 > 0, \\ x + 4 < 0, \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -2, \\ \begin{cases} x^2 - x - 6 > 0, \\ x + 4 < 0 \text{ (рис. 99)}, \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -2, \\ x < -4. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup \{-2\} \cup \{3\}$.

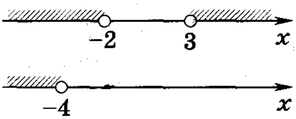


Рис. 99

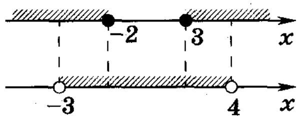


Рис. 100

№ 25. Решите неравенство $\dfrac{x^2 - x - 6}{\sqrt{12 + x - x^2}} \geqslant 0.$

Решение.

Система $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geqslant 0, \\ 12 + x - x^2 > 0 \end{cases}$ равносильна данному неравенству в области его определения.

Найдем пересечение множеств решений полученных неравенств системы (рис. 100).

Ответ: $(-3; -2] \cup [3; 4)$.

1.4.5. Возведение обеих частей неравенства в четную степень

Решая иррациональные неравенства возведением обеих частей в четную степень, надо быть очень внимательным и следить за тем, чтобы обе части неравенства были неотрицательными. Только тогда срабатывает теорема равносильности V. Предполагается также свободное владение и следствиями из теоремы V.

№ 26. Решите неравенство $\sqrt{x+7} - \sqrt{x} \geqslant 1$.

Решение.

ООН: $x \geqslant 0$ (рис. 101).

Перепишем данное неравенство в виде

$\sqrt{x+7} \geqslant 1 + \sqrt{x}$.

Возведем обе части в квадрат:

$x + 7 \geqslant 1 + 2\sqrt{x} + x$: $\sqrt{x} \leqslant 3$.

Еще раз возводим в квадрат, учитывая, что в ООН

$\sqrt{x} \geqslant 0$; $3 > 0$: $x \leqslant 9$.

Ответ: $[0; 9]$.

Рис. 101

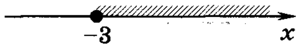


Рис. 102

№ 27. Решите неравенство $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+15} < 6$.

Решение.

ООН: $x \geqslant -3$ (рис. 102).

Возведем обе части данного неравенства в квадрат (теорема V): $x + 3 + x + 15 + 2\sqrt{x^2 + 18x + 45} < 36$,

$\sqrt{x^2 + 18x + 45} < 9 - x$. А теперь перейдем к системе $\begin{cases} -3 \leqslant x < 9, \\ x^2 + 18x + 45 < (9-x)^2, \end{cases}$ равносильной данному неравенству на множестве $[-3; 9)$ (следствие 1). Решаем ее:

$\begin{cases} -3 \leqslant x < 9, \\ x < 1, \end{cases}$ $-3 \leqslant x < 1$.

Ответ: $[-3; 1)$.

№ 28. Решите неравенство $3\sqrt{x} - \sqrt{x+3} < 1$.

Решение.

ООН: $x \geqslant 0$ (рис. 103).

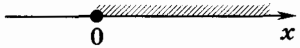


Рис. 103

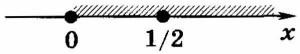


Рис. 104

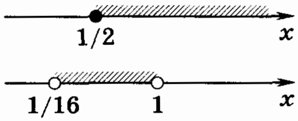


Рис. 105

Перепишем данное неравенство в виде

$3\sqrt{x} < 1 + \sqrt{x+3}$

и возведем обе части его в квадрат (теорема V):

$9x < 1 + 2\sqrt{x+3} + x + 3,\ \sqrt{x+3} > 4x - 2.$

А теперь переходим к совокупности, применяя следствие 3:

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leqslant x < 1/2, \\ \begin{cases} x \geqslant 1/2, \\ x + 3 > (4x-2)^2, \end{cases} \end{array}\right. \quad (\text{рис. } 104) \quad \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant x < 1/2, \\ \begin{cases} x \geqslant 1/2, \\ 16x^2 - 17x + 1 < 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leqslant x < 1/2, \\ \begin{cases} x \geqslant 1/2, \\ (x-1)(x-1/16) < 0 \ (\text{рис. } 105), \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant x < 1/2, \\ 1/2 \leqslant x < 1. \end{array}\right.$$

Ответ: [0; 1).

№ 29. Решите неравенство $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.

Решение.

ООН: $x \geqslant 2$ (рис. 106).

Возводим обе части неравенства в квадрат (теорема V): $x + 3 < 2x - 3 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 2}$,

$2\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 6 - x$,

$$\left[\begin{array}{l} x > 6, \\ \begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 6 \ (\text{следствие } 3) \\ 4x^2 - 12x + 8 > (6-x)^2, \end{cases} \end{array}\right. \quad (\text{рис. } 107),$$

Рис. 106

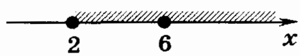


Рис. 107

$$\left[\begin{array}{l} x > 6, \\ \begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 6 \\ x^2 - 28/3 > 0, \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{(рис. 108).}$$

$$\left[\begin{array}{l} x > 6, \\ 2\sqrt{21}/3 < x \leqslant 6. \end{array}\right.$$

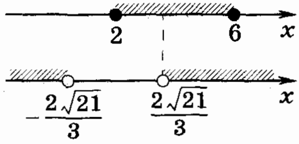


Рис. 108

Ответ: $(2\sqrt{21}/3; +\infty)$.

№ 30. Решите неравенство

$$\sqrt{x + 1/x^2} + \sqrt{x - 1/x^2} > 2/x.$$

Решение.

ООН: $\begin{cases} (x^3 + 1)/x^2 \geqslant 0, \\ (x^3 - 1)/x^2 \geqslant 0, \end{cases}$ $x \geqslant 1$ (рис. 109).

Преобразуем левую часть неравенства, учитывая ООН:

$$\sqrt{x^3 + 1}/x + \sqrt{x^3 - 1}/x > 2/x, \ \sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^3 - 1} > 2.$$

Возведем обе части последнего неравенства в квадрат (теорема V): $2x^3 + 2\sqrt{x^6 - 1} > 4$, $\sqrt{x^6 - 1} > 2 - x^3$. А теперь применим следствие 3 теоремы V. Получим совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x > \sqrt[3]{2}, \\ \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{2} \text{ (рис. 110)}, \\ x^6 - 1 > (2 - x^3)^2: \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x > \sqrt[3]{2}, \\ \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{2}, \\ 4x^3 > 5 \text{ (рис. 111)}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(\sqrt[3]{5/4}; +\infty)$.

Рис. 109

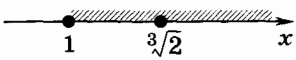


Рис. 110

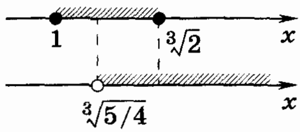


Рис. 111

1.4.6. Метод замены переменных

№ 31. Решите неравенство $\dfrac{3}{\sqrt{2-x}-3} \geqslant -1$.

Решение.

Пусть $\sqrt{2-x} = t$, где $t \geqslant 0$. Тогда получим систему рациональных неравенств $\begin{cases} 3/(t-3) \geqslant -1, \\ t \geqslant 0: \end{cases}$

$\begin{cases} t/(t-3) \geqslant 0, \\ t \geqslant 0 \text{ (рис. 112)}, \end{cases}$ $\quad t \in \{0\} \cup (3; +\infty)$.

И далее: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{2-x} = 0, \\ \sqrt{2-x} > 3, \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ 2-x > 9, \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x < -7. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty; -7) \cup \{2\}$.

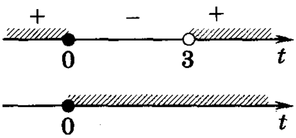


Рис. 112

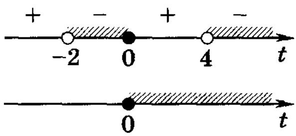


Рис. 113

№ 32. Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2} \geqslant \dfrac{2}{4-\sqrt{x}}$.

Решение.

Введем новую переменную: $t = \sqrt{x}$, где $t \geqslant 0$.

Решаем систему $\begin{cases} 1/(t+2) - 2/(4-t) \geqslant 0, \\ t \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{3t}{(t+2)(4-t)} \leqslant 0, \\ t \geqslant 0 \text{ (рис. 113)}, \end{cases}$ $\quad t \in (4; +\infty) \cup \{0\}$.

Перейдем к x: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 0, \\ \sqrt{x} > 4, \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x > 16. \end{array}\right.$

Ответ: $\{0\} \cup (16; +\infty)$.

№ 33. Решите неравенство $(3 - x)/\sqrt{15 - x} < 1$.

Решение.

Пусть $\sqrt{15 - x} = t$, где $t > 0$. Тогда $15 - x = t^2$, $x = 15 - t^2$. Теперь решаем систему рациональных неравенств

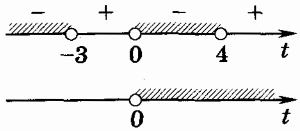


Рис. 114

$$\begin{cases} \dfrac{3 - 15 + t^2}{t} < 1, \\ t > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{t^2 - t - 12}{t} < 0, \\ t > 0 \text{ (рис. 114)}. \end{cases}$$

Получим $0 < t < 4$:

$$0 < \sqrt{15 - x} < 4, \qquad \begin{cases} 15 - x > 0, \\ 15 - x < 16, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 15, \\ x > -1. \end{cases}$$

Ответ: $(-1; 15)$.

№ 34. Решите неравенство

$$x^2 + 5x + 4 < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}.$$

Решение.

ООН: R.

Пусть $\sqrt{x^2 + 5x + 28} = t$, где $t \geqslant 0$.
Тогда $x^2 + 5x + 4 = t^2 - 24$.
Решаем систему

$$\begin{cases} t^2 - 5t - 24 < 0, \\ t \geqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 < t < 8, \\ t \geqslant 0, \end{cases}$$ $0 \leqslant t < 8$. Остается решить неравенство $\sqrt{x^2 + 5x + 28} < 8$. Применим теорему равносильности V:

$$x^2 + 5x + 28 < 64, \qquad x^2 + 5x - 36 < 0, \qquad -9 < x < 4.$$

Ответ: $(-9; 4)$.

№ 35. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + 1/\sqrt{x^2 - x + 1} < 2.$$

Решение.

ООН: R.

Пусть $\sqrt{x^2 - x + 1} = t$, где $t > 0$. Тогда получим неравенство $t + 1/t < 2$, где $t > 0$. Но известно, что

$t + 1/t \geqslant 2$ при $t > 0$. Поэтому данное неравенство решений не имеет.

Ответ: решений нет.

№ 36. Решите неравенство

$(2x + 1)/x - 2\sqrt{(2x + 1)/x} \geqslant 3.$

Решение.

Пусть $\sqrt{(2x + 1)/x} = t$, где $t \geqslant 0$. Переходим к системе рациональных неравенств $\begin{cases} t^2 - 2t - 3 \geqslant 0, \\ t \geqslant 0 \end{cases}$ (рис. 115).

Откуда $t \geqslant 3$. Решим теперь простейшее иррациональное неравенство $\sqrt{(2x + 1)/x} \geqslant 3$:

$(2x + 1)/x \geqslant 9$, $(1 - 7x)/x \geqslant 0$, $0 < x \leqslant 1/7$.

Ответ: $(0; 1/7]$.

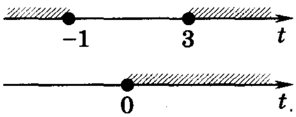


Рис. 115

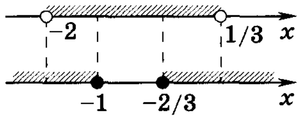


Рис. 116

№ 37. Решите неравенство

$\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1.$

Решение.

Пусть $\sqrt{3x^2 + 5x + 2} = t$, где $t \geqslant 0$. Получим систему неравенств

$\begin{cases} \sqrt{t^2 + 5} - t > 1, \\ t \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{t^2 + 5} > t + 1, \\ t \geqslant 0, \end{cases}$

$\begin{cases} t^2 + 5 > t^2 + 2t + 1, \\ t \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} t < 2, \\ t \geqslant 0. \end{cases}$

И далее: $\begin{cases} \sqrt{3x^2 + 5x + 2} < 2, \\ \sqrt{3x^2 + 5x + 2} \geqslant 0, \end{cases}$

$\begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 < 0, \\ 3x^2 + 5x + 2 \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} (x + 2)(x - 1/3) < 0, \\ (x + 1)(x + 2/3) \geqslant 0 \end{cases}$ (рис. 116).

Ответ: $(-2; -1] \cup [-2/3; 1/3]$.

1.4.7. Метод интервалов решения иррациональных неравенств

Напомним, что метод интервалов решения неравенств основан на **теореме:** если на интервале $(a; b)$ функция $y = f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то она сохраняет на этом интервале постоянный знак.

Пусть нам надо решить неравенство $f(x) > 0$ ($f(x) \geqslant 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leqslant 0$). Можно воспользоваться следующим алгоритмом.

1. Установить область определения функции $y = f(x)$. Отметить на числовой оси.

2. Найти промежутки непрерывности функции $y = f(x)$. Отметить их на числовой оси.

3. Найти нули функции (если они есть). Они могут «разбить» промежутки непрерывности на интервалы.

4. В каждом из полученных интервалов найти знак функции.

5. Проверить граничные точки интервалов знакопостоянства функции, входящие в область определения функции.

6. Записать ответ.

Рассмотрим ряд неравенств.

№ 38. Решите неравенство $(x-3)\sqrt{x^2 - x - 2} \geqslant 0$.

Решение.

Пусть $y = (x-3)\sqrt{x^2 - x - 2}$. Решим данное неравенство по приведенному выше алгоритму.

1. $D(y)$: $x^2 - x - 2 \geqslant 0$, $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ (рис. 117).

2. Функция непрерывна во всех точках $D(y)$, кроме -1 и 2 (рис. 118).

3. $y = 0$, если $\left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2, \\ x = 3. \end{array}\right.$

Рис. 117

Рис. 118

$x = 3$ разбивает интервал $(2; +\infty)$ на два интервала. Заметим, что $x = 3$ отмечается «выколотой» точкой (рис. 119).

4. Определяем знак функции в каждом из полученных интервалов (рис. 120).

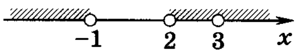


Рис. 119

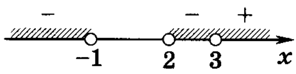


Рис. 120

5. Значения $x = -1$, $x = 2$, $x = 3$ входят в $D(y)$, причем $y(-1) = 0$, $y(2) = 0$, $y(3) = 0$. Числа -1, 2, 3 являются решениями данного неравенства.

Ответ: $[3; +\infty) \cup \{-1\} \cup \{2\}$.

№ 39. Решите неравенство $(\sqrt{x} - 3)/(x - 2) > 0$.

Решение.

Рассматриваем функцию $y = (\sqrt{x} - 3)/(x - 2)$.

1. $D(y)$: (рис. 121).
2. Промежутки непрерывности (рис. 122).

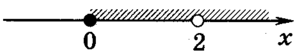


Рис. 121

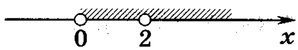


Рис. 122

3. Нули функции: $y = 0$ при $x = 9$ (рис. 123).
4. Знаки функции (рис. 124).

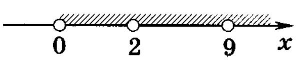


Рис. 123

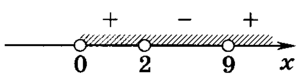


Рис. 124

5. Проверяем «граничные точки»: $y(0) = 3/2$, $3/2 > 0$, $y(9) = 0$. Число 0 входит в множество решений неравенства.

Ответ: $[0; 2) \cup (9; +\infty)$.

№ 40. Решите неравенство $(\sqrt{2-x}+4x-3)/x \geqslant 2$.

Решение.

1 способ (замены переменных). Пусть $\sqrt{2-x}=t$, где $t \geqslant 0$. Тогда $2-x=t^2$, $x=2-t^2$. Переходим к системе рациональных неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{t+8-4t^2-3}{2-t^2}-2 \geqslant 0, \\ t \geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2t^2-t-1}{t^2-2} \geqslant 0, \\ t \geqslant 0 \end{cases} \text{ (рис. 125)},$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ t > \sqrt{2}, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{2-x} \leqslant 1, \\ \sqrt{2-x} > \sqrt{2}, \end{array}\right.$$

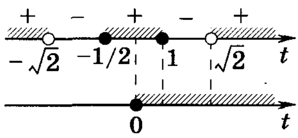


Рис. 125

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2-x \geqslant 0, \\ 2-x \leqslant 1, \end{cases} \\ x < 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x < 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\, 0) \cup [1;\, 2]$.

2 способ (метод интервалов). Перепишем данное неравенство в виде $(\sqrt{2-x}+2x-3)/x \geqslant 0$. Пусть $y=(\sqrt{2-x}+2x-3)/x$.

1. $D(y)$: $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x \neq 0 \text{ (рис. 126)}. \end{cases}$

2. Функция непрерывна на множестве $(-\infty;\, 0) \cup (0;\, 2)$ (рис. 127).

Рис. 126

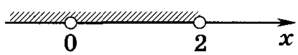


Рис. 127

3. Находим нули функции:

$\sqrt{2-x}=3-2x$,

$$\begin{cases} 2-x=(3-2x)^2, \\ x \leqslant 3/2,\ x \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2-11x+7=0, \\ x \leqslant 3/2,\ x \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7}{4}, \\ x=1, \end{array}\right. \\ x \leqslant \dfrac{3}{2},\ x \neq 0, \end{cases} \qquad x=1 \text{ (рис. 128).}$$

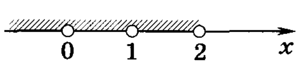


Рис. 128

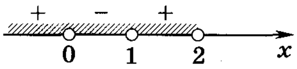


Рис. 129

4. Устанавливаем знаки функции на каждом из трех полученных интервалов (рис. 129).

5. $y(1) = 0$, $y(2) > 0$. Поэтому $x = 1$ и $x = 2$ — решения неравенства.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup [1; 2]$.

№ 41. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+5x} - 4x + 6}{x-2} \leqslant -2$.

Решение.

Перейдем к неравенству $\dfrac{\sqrt{x^2+5x} - 2x + 2}{x-2} \leqslant 0$.

Рассмотрим функцию $y = \dfrac{\sqrt{x^2+5x} - 2x + 2}{x-2}$.

1. $D(y)$: $\begin{cases} x^2 + 5x \geqslant 0, \\ x \neq 2 \text{ (рис. 130)}, \end{cases}$

$x \in (-\infty; -5] \cup [0; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Промежутки непрерывности функции:

$(-\infty; -5) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

Отметим их на числовой прямой (рис. 131).

Рис. 130

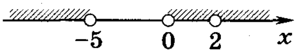


Рис. 131

3. Найдем нули функции:

$\sqrt{x^2+5x} = 2x - 2$, $\quad \begin{cases} x^2 + 5x = 4x^2 - 8x + 4, \\ x \geqslant 1,\ x \neq 2, \end{cases}$

$\begin{cases} 3x^2 - 13x + 4x = 0, \\ x \geqslant 1,\ x \neq 2, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -1/3 \end{array}\right. \\ x \geqslant 1,\ x \neq 2, \end{cases}$ $\quad x = 4$ (рис. 132).

4. Отметим интервалы знакопостоянства функции (рис. 133).

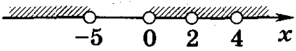


Рис. 132

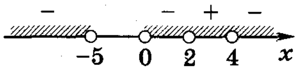


Рис. 133

5. Проверим граничные точки $x = -5$, $x = 0$, $x = 4$: $y(-5) < 0$, $y(0) < 0$, $y(4) = 0$.

Ответ: $(-\infty; -5] \cup [0; 2) \cup [4; +\infty)$.

№ 42. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{1 - x^3} - 1}{1 + x} \leqslant x.$

Решение.

Представим данное неравенство в виде

$$\frac{\sqrt{1 - x^3} - (x^2 + x + 1)}{1 + x} \leqslant 0.$$

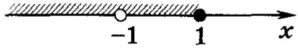


Рис. 134

Найдем ООН: $\begin{cases} 1 - x \geqslant 0, \\ x \neq -1, \end{cases}$

$\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \neq -1 \end{cases}$ (рис. 134).

Разделим обе части неравенства на $\sqrt{x^2 + x + 1}$:

$(\sqrt{1 - x} - \sqrt{x^2 + x + 1})/(1 + x) \leqslant 0$. А теперь вводим функцию $y = (\sqrt{1 - x} - \sqrt{x^2 + x + 1})/(1 + x)$.

1. $D(y)$: (рис. 135).

2. Функция непрерывна во всех точках $D(y)$, кроме $x = 1$ (рис. 136).

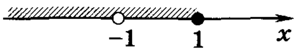


Рис. 135

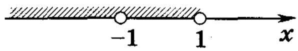


Рис. 136

3. Находим нули функции:

$\begin{cases} \sqrt{1 - x} = \sqrt{x^2 + x + 1}, \\ x \leqslant 1, x \neq -1, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 2x = 0, \\ x \leqslant 1, x \neq -1, \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 0. \end{array}\right.$

Отметим на оси точки, соответствующие числам -2 и 0 (рис. 137).

4. Устанавливаем знаки функции в каждом из четырех полученных интервалов (рис. 138).

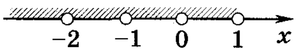


Рис. 137

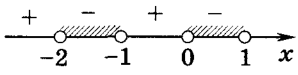


Рис. 138

5. Числа -2, 0, 1 входят в $D(y)$. Проверим, являются ли они решениями: $y(-2) = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) < 0$.

Ответ: $[-2; -1) \cup [0; 1]$.

2. Иррациональные уравнения и системы уравнений с параметром

2.1. Основные понятия

▶ ***Определение 1.*** Параметр (от греч. παραμετρῶυ — отмеривающий) — величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой.

Например, в декартовых координатах уравнение $y = ax^2$, $a \neq 0$, задает множество всех парабол с вершинами в начале координат. При конкретном значении $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ мы получаем одну из парабол этого семейства.

Дадим еще одно определение параметра.

▶ ***Определение 2.*** Неизвестные величины, значения которых мы задаем сами, называются параметрами.

Какие неизвестные следует выбрать в качестве параметров, обычно определяется уже самим подходом к исследованию выражения.

Приведем пример. Пусть нужно решить уравнение

$$x^4 + x^3 - (1 + 2a)x^2 - (a + 1)x + a^2 + a = 0.$$

Легко видеть, что в роли параметра лучше сначала выбрать x и решить квадратное относительно a уравнение: $a^2 - (2x^2 + x - 1)a + x^4 + x^3 - x^2 - x = 0$.

Получим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} a = x^2 - 1, \\ a = x^2 + x. \end{array}\right.$$

Затем считаем a параметром и решаем два квадратных относительно x уравнения

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = a + 1, \\ x^2 + x - a = 0. \end{array}\right.$$

Из приведенных выше двух определений следует, что параметр является переменной величиной и имеет при этом двойственную природу: 1) параметр — число; 2) параметр — неизвестное число.

Вторая функция параметра создает дополнительные трудности в работе с ним, ограничивая свободу общения его неизвестностью.

▶ ***Определение 3.*** Пусть дано равенство с переменными x и a: $f(x, a) = 0$. Если ставится задача для каждого действительного значения a решить это уравнение относительно x, то уравнение $f(x; a) = 0$ называется уравнением с переменной x и параметром a.

Параметр обычно обозначается первыми буквами латинского алфавита: $a, b, c, d, \ldots$.

Переменная, относительно которой решается уравнение, — последними буквами алфавита: $x, y, z, t, u, \ldots$.

❑ Примеры.

1. $2x - a = x + 1$. 2. $x/a + x^2 = \sqrt{x}$. 3. $\sqrt{x - a} = 2x + 1$.

4. $\sin x = \dfrac{a-1}{a+2}$. 5. $\dfrac{x - b}{b(x-1)} = 0$. 6. $\dfrac{x - 2c + 1}{cx - 3} = 0$.

7. $ax^2 - \sqrt{a}x + 5 = 0$. 8. $\log_{(a-1)}(x^2 - a^2) = 3$.

9. $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \dfrac{a^2 - 4}{2a - x} = 1$.

▶ ***Определение 4.*** Под областью определения уравнения $f(x; a) = 0$ с параметром a будем понимать все такие системы значений x и a, при которых $f(x; a)$ имеет смысл.

Заметим, что иногда область определения уравнения устанавливается довольно легко, а иногда в явном виде это сделать трудно. Тогда ограничиваемся только системой неравенств, множество решений которой и является областью определения уравнения. Этого бывает, как правило, достаточно для решения уравнения.

Установим область определения каждого из приведенных выше уравнений:

1. $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} a \neq 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant a. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} a \neq -2, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} b \neq 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} c \in \mathrm{R}, \\ cx \neq 3. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} a > 1, \\ a \neq 2, \\ x^2 - a^2 > 0. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} a > 0,\ a \neq 1, \\ x > 0,\ x \neq 1, \\ \dfrac{a^2 - 4}{2a - x} > 0, \end{cases}$

где R — множество всех действительных чисел.

▶ ***Определение 5.*** Под решением уравнения $f(x;\ a) = 0$ с параметром a будем понимать систему значений x и a из области определения уравнения, обращающую его в верное числовое равенство.

❑ Примеры.

1. Пусть дано уравнение $\dfrac{x - 2a}{x + 1} = 0.$

Установим область определения уравнения:

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq -1. \end{cases}$

Найдем несколько частных решений этого уравнения:

$\begin{cases} a = 1, \\ x = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2, \\ x = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

Эти решения можно записать и так:

Если $a = 1$, то $x = 2$.

Если $a = 2$, то $x = 4$.

Если $a = 0$, то $x = 0$.

Найдем общее решение:

1) $\begin{cases} a \neq -1/2, \\ x = 2a. \end{cases}$

2) Если $a = -1/2$, то решений нет.

Ответ. 1) Если $a \neq -1/2$, то $x = 2a$.
2) Если $a = -1/2$, то решений нет.

Замечание. Далее для кратости вместо слов «общее решение» будем писать «решение».

2. Решим уравнение $(b + 1)x = (b + 1)(b - 5)$.

Решение.

Установим область определения уравнения:

$$\text{ООУ: } \begin{cases} b \in R, \\ x \in R. \end{cases}$$

1) Пусть $b = -1$. Уравнение примет вид: $0 \cdot x = 0$. Значит, x — любое действительное число.
2) Если $b \neq -1$, то $x = b - 5$.

Ответ. 1) Если $b \neq -1$, то $x = b - 5$.
2) Если $b = -1$, то $x \in R$.

Определение 6. Решить уравнение $f(x;\ a) = 0$ с параметром a — это значит для каждого действительного значения a найти все решения данного уравнения или установить, что их нет.

Договоримся все значения параметра a, при которых $f(x;\ a)$ не имеет смысла, включать в число значений параметра, при которых уравнение не имеет решений.

Пример. Решить уравнение $a/(a - 1) = x + 1$.

Решение.

Установим область определения уравнения:

$$\text{ООУ: } \begin{cases} a \neq 1, \\ x \in R. \end{cases}$$

Выразим неизвестное x через параметр a.

$x = a/(a - 1) - 1$, $x = 1/(a - 1)$.

Ответ. 1) Если $a \neq 1$, то $x = 1/(a - 1)$.
2) Если $a = 1$, то решений нет.

Определение 7. Уравнения $f(x;\ a) = 0$ и $\varphi(x;\ a) = 0$ равносильны при фиксированном значении $a = a_0$, если уравнения $f(x;\ a_0) = 0$ и $\varphi(x;\ a_0) = 0$ равносильны.

❑ П р и м е р. Найдите все значения параметра a, при которых уравнения $(a-1)x = a-2$ и $(a-1)x = 3a-8$ равносильны.

Р е ш е н и е.

1) При $a = 1$ оба уравнения решений не имеют, а потому равносильны.
2) Если $a \neq 1$, то $x = (a-2)/(a-1)$ — решение первого уравнения, $x = (3a-8)/(a-1)$ — решение второго уравнения.

Найдем значения a, при которых эти решения равны.

$(a-2)/(a-1) = (3a-8)/(a-1)$, $a = 3$.

При $a = 3$ $x = 1/2$.

О т в е т. 1; 3.

▶ ***Определение 8.*** Уравнение $f(x; a) = 0$ является следствием уравнения $\varphi(x; a) = 0$ при некотором значении $a = a_0$, если множество решений уравнения $\varphi(x; a_0) = 0$ содержится среди множества решений уравнения $f(x; a_0) = 0$.

Аналогичные определения легко сформулировать для неравенств с параметром, заменив в вышеперечисленных определениях термин «уравнение» на термин «неравенство».

Рассмотрим пример, иллюстрирующий определение 8 для неравенств с параметром.

❑ П р и м е р. При каких значениях a неравенство

$$2x > a \qquad (1)$$

является следствием неравенства

$$3x + 2 \geqslant 2a? \qquad (2)$$

Р е ш е н и е.

Решаем каждое из неравенств:

$\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x > a/2. \ (1) \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant (2a-2)/3. \ (2) \end{cases}$

А теперь достаточно решить неравенство

$(2a-2)/3 > a/2$; $4a - 4 > 3a$; $a > 4$.

О т в е т. $(4; +\infty)$.

Все задачи, приведенные далее в нашем пособии, рассматриваются на множестве действительных (вещественных) чисел.

2.2. Подготовительные упражнения

№ 1. Найдите область определения уравнения

а) $\sqrt{-|x-1|-a^2-1}=7x-5$.

Ответ: ни одна пара значений x и a не является допустимой.

б) $\sqrt{2x+a}=3x$.

Решение.

Область определения уравнения совпадает с множеством решений неравенства $2x+a\geqslant 0$:

$$\begin{cases} a\in \mathrm{R}, \\ x\geqslant -a/2. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} a\in \mathrm{R}, \\ x\in [-a/2;+\infty). \end{cases}$

в) $\sqrt[3]{5-ax}=x$.

Ответ: $\begin{cases} a\in \mathrm{R}, \\ x\in \mathrm{R}. \end{cases}$

г) $\sqrt{-(x^2-1)^2-|a|}=4x/(a-1)$.

Ответ: $\begin{cases} a=0, \\ x=1, \end{cases}$ $\begin{cases} a=0, \\ x=-1. \end{cases}$

д) $\sqrt{\arccos -\pi/4}=\arcsin a$.

Решение.

$$\begin{cases} \arccos x-\pi/4\geqslant 0, \\ -1\leqslant a\leqslant 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \arccos x\geqslant \pi/4, \\ -1\leqslant a\leqslant 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant \sqrt{2}/2, \\ -1\leqslant a\leqslant 1. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} a\in [-1;1], \\ x\in [-1;\sqrt{2}/2]. \end{cases}$

е) $\sqrt{(x-1)(a+3)} = x - a$.

Решение.

Достаточно решить неравенство $(x-1)(a+3) \geqslant 0$.

Рассмотрим ряд случаев:

1) $\begin{cases} a = -3, \\ x \in R; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a > -3, \\ x \geqslant 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a < -3, \\ x \leqslant 1. \end{cases}$

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 139).

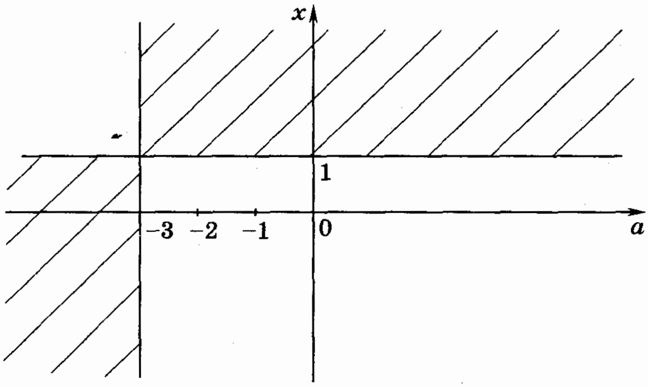


Рис. 139

Координаты любой точки заштрихованных областей входят в ООУ, т. е. ООУ — это множество пар координат всех этих точек.

ж) $\sqrt{x+a} + \sqrt{x} = 1$.

Решение.

$\begin{cases} x + a \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -a, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Рассмотрим ряд случаев:

1) если $a \geqslant 0$, то $x \geqslant 0$;

2) если $a < 0$, то $x \geqslant -a$.

Ответ: 1) $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a < 0, \\ x \geqslant -a. \end{cases}$

Воспользуемся опять системой координат (aOx) (рис. 140).

з) $\sqrt{m - 2x - x^2} = 2$.

Решение.

Решим неравенство $x^2 + 2x - m \leqslant 0$.

Определим $D_1 = D/4$: $D_1 = 1 + m$.

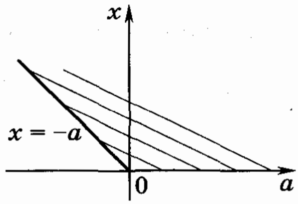


Рис. 140

1) $D_1 = 0$, $m = -1$:

$(x+1)^2 \leqslant 0$, $x = -1$.

2) $m < -1$: решений нет.

3) $m > -1$: $x \in [-1 - \sqrt{1+m}; -1 + \sqrt{1+m}]$ (*).

Нанесем результаты на ось параметра (рис. 141).

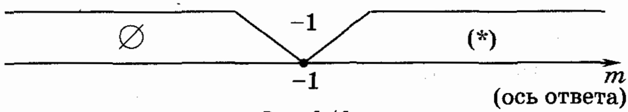


Рис. 141

Ответ: 1) $\begin{cases} m = -1, \\ x = -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} m > -1, \\ x \in [-1 - \sqrt{1+m}; -1 + \sqrt{1+m}]. \end{cases}$

и) $\sqrt{a - x} + \sqrt{x - 3} = 1$.

Решение.

Составим и решим систему $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \leqslant a, \\ x \geqslant 3. \end{cases}$

Если $a < 3$, то система решений не имеет.

Если $a = 3$, то $x = 3$.

Если $a > 3$, то $3 \leqslant x \leqslant a$.

А теперь легко записать ООУ (рис. 142).

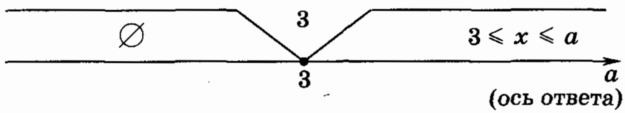


Рис. 142

Ответ: 1) $\begin{cases} a = 3, \\ x = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a > 3, \\ 3 \leqslant x \leqslant a. \end{cases}$

№ 2. Решите уравнение $\sqrt{(x-1)/(a+2)} = -4$.

Ответ: решений нет ни при каком $a \in \mathrm{R}$.

№ 3. Решите уравнение $\sqrt{-x^2 - b^2} = 2x + b$.

Ответ: 1) Если $b = 0$, то $x = 0$.
2) Если $b \neq 0$, то решений нет.

№ 4. Решите уравнение

$$\sqrt{(x-a)(x-3)} = \sqrt{x-a} \cdot \sqrt{x-3}.$$

Решение.
Множество решений уравнения совпадает с его областью определения. Достаточно решить систему неравенств

$$\begin{cases} x - a \geqslant 0, \\ x - 3 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant a, \\ x \geqslant 3. \end{cases}$$

Ответ: 1) $\begin{cases} a = 3, \\ x \geqslant 3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} a > 3, \\ x \geqslant a. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a < 3, \\ x \geqslant 3. \end{cases}$

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 143).

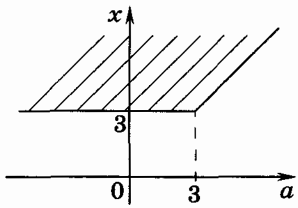


Рис. 143

№ 5. Решите уравнение $\sqrt{\arcsin x} = 3 + a^2$.

Решение.

В области определения уравнения $\left(\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}\right)$ имеют место неравенства: $0 \leqslant \sqrt{\arcsin x} \leqslant \sqrt{\pi/2}$, $3 + a^2 \geqslant 3$.
Откуда следует, что данное уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет ни при каком значении $a \in \mathrm{R}$.

№ 6. Решите уравнение $\sqrt{\cos x} = -a^2 + 2a - 1$.

Решение.

Перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{\cos x} = -(a-1)^2,$$

откуда заключаем, что оно имеет решения только при $a = 1$.

$$\sqrt{\cos x} = 0,\ \cos x = 0,\ x = \pi/2 + \pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: 1) Если $a = 1$, то $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$.
2) Если $a \neq 1$, то решений нет.

№ 7. Решите уравнение $\sqrt{\sin x} = a$.

Решение.

Рассмотрим ряд случаев.

1) $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$: решений нет.

2) $a = 0$: $x_1 = \pi n$, $n \in Z$.

3) $a = 1$: $\sin x = 1$, $x_2 = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$.

4) $a \in (0; 1)$: $\sin x = a^2$, $x_3 = (-1)^m \arcsin a^2 + \pi m$, $m \in Z$.

Ответ: легко списать с оси параметра a (рис. 144).

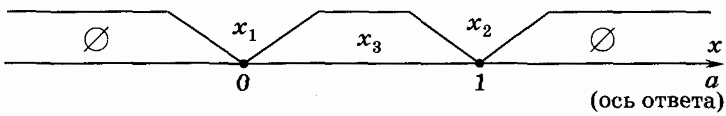


Рис. 144

№ 8. Решите уравнение $\sqrt{a^2(x-1)^2} = a(x-1)$.

Решение.

Множество решений уравнения совпадает с множеством решений неравенства $a(x-1) \geqslant 0$.

Ответ: 1) Если $a = 0$, то $x \in R$.
2) Если $a > 0$, то $x \geqslant 1$.
3) Если $a < 0$, то $x \leqslant 1$.

№ 9. Решите уравнение

$$\sqrt{(b-1)^2(x+2)^2} = -|(b-1)(x+2)|.$$

Решение.

Учитывая, что $\sqrt[2n]{A} \geqslant 0$, где $A \geqslant 0$, достаточно решить уравнение $(b-1)(x+2) = 0$.

Ответ: 1) Если $b = 1$, то $x \in \mathbb{R}$.
2) Если $b \neq 1$, то $x = -2$.

№ 10. Решите уравнение $ax\sqrt{x-2} = 0$.

Решение.

Найдем сначала ООУ: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x = 2, \\ a \in \mathbb{R}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 2, \\ ax = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ a = 0. \end{cases}$

Ответ: 1) Если $a = 0$, то $x \geqslant 2$.
2) Если $a \neq 0$, то $x = 2$.

№ 11. Решите уравнение $(a^2+1)\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = 0$.

Решение.

Данное уравнение в области его определения $\left(\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \geqslant 0 \end{cases}\right)$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} (a^2+1)\sqrt{x} = 0, \\ \sqrt{x+2} = 0, \end{cases}$ которая решений не имеет.

Ответ: решений нет ни при каком значении $a \in \mathbb{R}$.

№ 12. Решите уравнение $m^2\sqrt{x-5} + |x-7| = 0$.

Решение.

Составим систему $\begin{cases} m^2\sqrt{x-5} = 0, \\ |x-7| = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} m = 0, \\ x = 7. \end{cases}$

Ответ: 1) Если $m = 0$, то $x = 7$.
2) Если $m \neq 0$, то решений нет.

№ 13. Решите уравнение $\frac{a}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - 1$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Перейдем к уравнению $a = x - 1$, откуда $x = a + 1$.

<u>Исследование</u>.

$\begin{cases} x = a + 1, \\ a + 1 \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = a + 1, \\ a \geqslant -1. \end{cases}$

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \geqslant -1$, то $x = a + 1$.
2) Если $a < -1$, то решений нет.

2.3. Простейшие иррациональные уравнения с параметром

№ 1. Решите уравнение $\sqrt{x - 1} = a^2$.

<u>Решение</u>.

Данное уравнение в своей области определения равносильно уравнению $x - 1 = a^4$, откуда $x = 1 + a^4$.

<u>Ответ</u>: $x = 1 + a^4$ при $a \in \mathrm{R}$.

№ 2. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x + a} + a - x = 0$ имеет корень $x_0 = 0$?

<u>Решение</u>.

Если $x_0 = 0$ — корень, то $\sqrt{a} + a = 0$. Достаточно решить систему $\begin{cases} \sqrt{a} = 0, \\ a = 0, \\ a \geqslant 0, \end{cases}$ $a = 0$.

<u>Ответ</u>: 0.

№ 3. Найдите все значения a, при которых число $x = 2$ является корнем уравнения

$$\left(a - 3x^2 - \cos \frac{11\pi}{4} x\right) \cdot \sqrt{8 - ax} = 0.$$

Решение.

Подставляем в данное уравнение вместо x число 2:

$$\left(a - 12 - \cos\frac{11\pi}{2}\right)\sqrt{8 - 2a} = 0,$$

$$(a - 12)\sqrt{8 - 2a} = 0.$$

Достаточно решить систему $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 12, \\ a = 4, \end{array}\right. \\ 8 - 2a \geqslant 0, \end{cases}$ $a = 4$.

Ответ: 4.

№ 4. Решите уравнение $\sqrt{x + 3} = c$.

Решение.

1) Если $c < 0$, то решений нет.

2) Пусть $c \geqslant 0$: $x + 3 = c^2$, $x = c^2 - 3$.

Ответ: 1) Если $c \geqslant 0$, то $x = c^2 - 3$.
2) Если $c < 0$, то решений нет.

№ 5. Решите уравнение $\sqrt{x - 2a} = 1 - a$.

Решение.

Данное уравнение в своей области определения равносильно системе $\begin{cases} x - 2a = (1 - a)^2, \\ 1 - a \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 + a^2, \\ a \leqslant 1. \end{cases}$

Ответ: 1) Если $a \leqslant 1$, то $x = 1 + a^2$.
2) Если $a > 1$, то решений нет.

№ 6. Решите уравнение $\sqrt{ax + 5a} = 1$.

Решение.

Решим уравнение $ax + 5a = 1$, которое равносильно данному в области его определения (следствие из теоремы II).

Ответ: 1) Если $a = 0$, то решений нет.
2) Если $a \neq 0$, то $x = (1 - 5a)/a$.

№ 7. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x - 1} = 2a - |x|$ имеет решения?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

Решим данное уравнение графически, предварительно переписав его в виде $\sqrt{x-1} = 2a - x$, учтя область определения уравнения.

Рассматриваем функции: $y = \sqrt{x-1}$, $y = 2a - x$ (рис. 145).

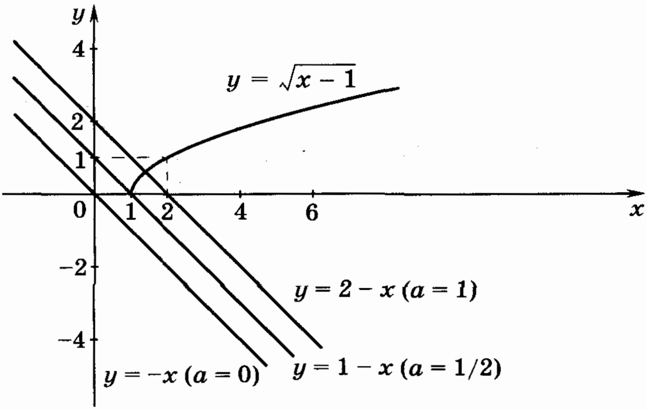


Рис. 145

Прямая с уравнением $y = 2a - x$ пересечет график функции $y = \sqrt{x-1}$, если $a \geqslant 1/2$.

Ответ: $a \geqslant 1/2$.

№ 8. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + ax + 4} = x$.

Решение.

Решим систему $\begin{cases} x^2 + ax + 4 = x^2, \\ x \geqslant 0, \end{cases}$ равносильную данному уравнению в области его определения:
$\begin{cases} ax = -4, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

1) Пусть $a = 0$: $0 \cdot x = -4$. Решений нет.

2) Если $a > 0$, то система $\begin{cases} x = -4/a, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ решений не имеет.

3) Если $a < 0$, то $x = -4/a$.

<u>Ответ</u>: 1) Если $a < 0$, то $x = -4/a$.
2) Если $a \geqslant 0$, то решений нет.

№ 9. Решите уравнение $a\sqrt{x} = 1 - a$.

<u>Решение</u>.

1) Пусть $a = 0$: $0 \cdot \sqrt{x} = 1$. Уравнение решений не имеет.

2) Если $a \neq 0$, то переходим к простейшему уравнению $\sqrt{x} = \dfrac{1-a}{a}$, а затем к системе $\begin{cases} x = \left(\dfrac{1-a}{a}\right)^2, \\ \dfrac{1-a}{a} \geqslant 0: \end{cases}$

$\begin{cases} x = \left(\dfrac{1-a}{a}\right)^2, \\ a \in (0; 1]. \end{cases}$ Обозначим это решение (*) на рис. 146.

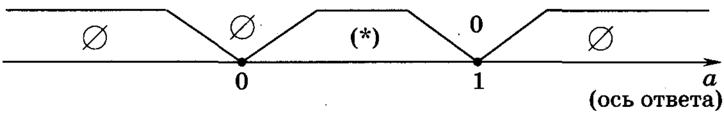


Рис. 146

Представим результаты на оси ответа (рис. 146).

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \in (0; 1]$, то $x = (1/a - 1)^2$.
2) В остальных случаях решений нет.

№ 10. Решите уравнение $\sqrt[4]{x^2 + 2ax + a^2} = 1$.

<u>Решение</u>.

Преобразуем левую часть уравнения: $\sqrt[4]{(x+a)^2} = 1$.

Тогда $(x+a)^2 = 1$, $\left[\begin{array}{l} x + a = 1, \\ x + a = -1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1 - a, \\ x = -1 - a. \end{array}\right.$

Ответ: уравнение имеет два корня $x = 1 - a$ и $x = -1 - a$ при любом значении $a \in \mathrm{R}$.

№ 11. Решите уравнение $\dfrac{a-1}{\sqrt{x+1}} = 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x > -1. \end{cases}$

Переходим к уравнению $a - 1 = \sqrt{x+1}$, равносильному в найденной ООУ данному уравнению, а затем к системе

$$\begin{cases} x + 1 = (a-1)^2, \\ a \geqslant 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a(a-2), \\ a \geqslant 1. \end{cases}$$

Исследование.

$$\begin{cases} x = a(a-2), \\ a^2 - 2a > -1, \\ a \geqslant 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a(a-2), \\ (a-1)^2 > 0, \\ a \geqslant 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a(a-2), \\ a > 1. \end{cases}$$

Ответ: 1) Если $a > 1$, то $x = a(a-2)$.
2) Если $a \leqslant 1$, то решений нет.

№ 12. Решите уравнение $\sqrt{5-x} = \sqrt{a}$.

Решение.

Это уравнение в своей области определения равносильно системе $\begin{cases} 5 - x = a, \\ a \geqslant 0. \end{cases}$ Имеем: $\begin{cases} x = 5 - a, \\ a \geqslant 0. \end{cases}$

Ответ: 1) Если $a \geqslant 0$, то $x = 5 - a$.
2) Если $a < 0$, то решений нет.

№ 13. Решите уравнение $\sqrt{x+1} = \sqrt{a-x}$.

Решение.

Решим систему $\begin{cases} x + 1 = a - x, \\ x \geqslant -1, \end{cases}$ которая равносильна данному уравнению в его области определения.

$$\begin{cases} x = (a-1)/2, \\ (a-1)/2 \geqslant -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (a-1)/2, \\ a \geqslant -1. \end{cases}$$

Ответ: 1) Если $a \geqslant -1$, то $x = (a-1)/2$.
2) Если $a < -1$, то решений нет.

№ 14. Решите уравнение $\sqrt{x+2a} = \sqrt{a-2x}$.

Решение.

Достаточно решить систему

$$\begin{cases} x+2a=a-2x, \\ x\geqslant -2a, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-a/3, \\ -a/3\geqslant -2a, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-a/3, \\ a\geqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: 1) Если $a\geqslant 0$, то $x=-a/3$.
2) Если $a<0$, то решений нет.

№ 15. Решите уравнение $\sqrt{ax-1} = \sqrt{x+a}$.

Решение.

Решим систему $\begin{cases} ax-1=x+a, \\ x\geqslant -a; \end{cases} \quad \begin{cases} x(a-1)=a+1, \\ x\geqslant -a. \end{cases}$

Сначала решаем уравнение $x(a-1)=a+1$.

1) Пусть $a=1$: $x\cdot 0=2$, решений нет.

2) Если $a\neq 1$, то $x=(a+1)/(a-1)$.

Опять переходим к системе

$$\begin{cases} x=(a+1)/(a-1), \\ a\neq 1, \\ (a+1)/(a-1)\geqslant -a, \end{cases} \quad \begin{cases} x=(a+1)/(a-1), \\ a\neq 1, \\ (a^2+1)/(a-1)\geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=(a+1)/(a-1), \\ a>1. \end{cases}$$

Ответ: 1) Если $a>1$, то $x=(a+1)/(a-1)$.
2) Если $a\leqslant 1$, то решений нет.

№ 16. Решите уравнение $\sqrt{x+a} = \sqrt{2a+ax}$.

Решение.

Составляем и решаем систему

$$\begin{cases} x+a=2a+ax, \\ x\geqslant -a, \end{cases} \quad \begin{cases} x(1-a)=a, \\ x\geqslant -a. \end{cases}$$

1) Если $a=1$, то система и данное уравнение решений не имеют.

2) $a\neq 1$: $\begin{cases} x=a/(1-a), \\ a\neq 1, \\ a/(1-a)\geqslant -a, \end{cases} \quad \begin{cases} x=a(1-a), \\ a\neq 1, \\ (2a-a^2)/(1-a)\geqslant 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} x=a/(1-a), \\ a\neq 1, \\ a(2-a)/(1-a)\geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a/(1-a), \\ a \in [0;\, 1) \cup [2;\, +\infty) \text{ (рис. 147).} \end{cases}$$

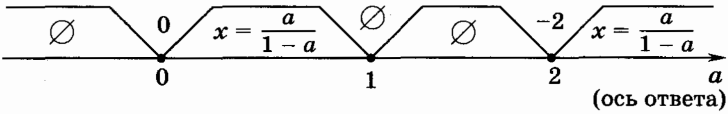


Рис. 147

Ответ: 1) Если $a \in [0;\, 1) \cup [2;\, +\infty)$, то $x = a/(1-a)$.
2) Если $a \in (-\infty;\, 0) \cup [1;\, 2)$,
то решений нет.

№ 17. Решите уравнение $(a-2)\sqrt{x+1} = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant -1. \end{cases}$

Ответ: 1) Если $a = 2$, то $x \geqslant -1$.
2) Если $a \neq 2$, то $x = -1$.

№ 18. Решите уравнение $(x-2a)\sqrt{x+2a} = 0$.

Решение:

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant -2a. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x_1 = 2a, \\ 2a \geqslant -2a, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2a, \\ a \geqslant 0. \end{cases}$ 2) $x_2 = -2a$, $a \in \mathrm{R}$.

Ответ: 1) Если $a \leqslant 0$, то $x_2 = -2a$.
2) Если $a > 0$, то $x_1 = 2a$, $x_2 = -2a$.

№ 19. Решите уравнение $(x-2)/\sqrt{a^2 - ax - 3} = 0$.

Решение.
Решим систему

$\begin{cases} x = 2, \\ a^2 - 2a - 3 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ a \in (-\infty;\, -1) \cup (3;\, +\infty). \end{cases}$

Ответ: 1) Если $a \in (-\infty;\, -1) \cup (3;\, +\infty)$, то $x = 2$.
2) Если $a \in [-1;\, 3]$, то решений нет.

№ 20. Решите уравнение $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+3a} = 2a$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant 0, \\ x \geqslant -3a. \end{cases}$

Представим ООУ с помощью оси параметра a (рис. 148).

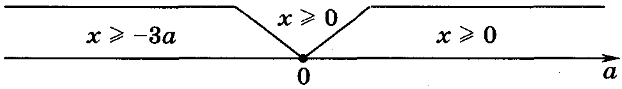


Рис. 148

Перейдем к уравнению $\sqrt{x(x+3a)} = 2a$, равносильному данному в найденной ООУ, а затем к системе

$\begin{cases} x^2 + 3ax = 4a^2, \\ a \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 3ax - 4a^2 = 0, \\ a \geqslant 0, \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = a, \\ x = -4a, \end{array} \right. \\ a \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = a, \\ a \geqslant 0. \end{cases}$

Опять воспользуемся осью параметра a, но уже как осью ответа (рис. 149).

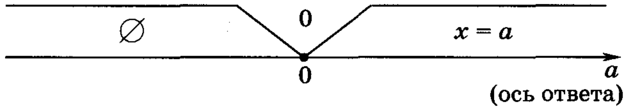


Рис. 149

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \geqslant 0$, то $x = a$.
2) Если $a < 0$, то решений нет.

№ 21. Решите уравнение $\sqrt{x-3} = x - a$.

<u>Решение</u>.

Переходим к системе $\begin{cases} x - 3 = (x-a)^2, \\ x \geqslant a, \end{cases}$ которая равносильна данному уравнению в области его определения.

$\begin{cases} x^2 - x(2a+1) + a^2 + 3 = 0, \\ x \geqslant a. \end{cases}$

Решим сначала квадратное уравнение.

$D = (2a + 1)^2 - 4a^2 - 12 = 4a - 11.$

1) Если $a < 11/4$, то решений нет.

2) Пусть $a = 11/4$: $x_{1,2} = 13/4$. Заметим, что $13/4 > 11/4$.

3) Если $a > 11/4$, то уравнение имеет два различных корня:

$x_1 = (2a + 1 + \sqrt{4a - 11})/2;$

$x_2 = (2a + 1 - \sqrt{4a - 11})/2.$

Легко видеть, что $x_1 > a$ при $a > 11/4$. Узнаем, когда $x_2 \geqslant a$, если $a > 11/4$:

$(2a + 1 - \sqrt{4a - 11})/2 \geqslant a$, $1 - \sqrt{4a - 11} \geqslant 0$, $\sqrt{4a - 11} \leqslant 1$,

$\begin{cases} 4a - 11 \leqslant 1, \\ a > 11/4, \end{cases}$ $\begin{cases} a \leqslant 3, \\ a > 11/4. \end{cases}$

Заполняем ось параметра (рис. 150).

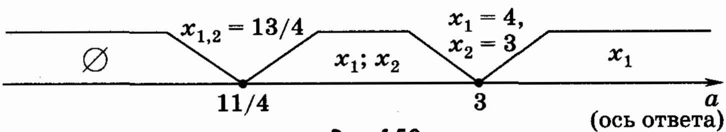


Рис. 150

<u>Ответ:</u> 1) Если $a \in (11/4; 3]$, то уравнение имеет два корня

$x_1 = (2a + 1 + \sqrt{4a - 11})/2,$

$x_2 = (2a + 1 - \sqrt{4a - 11})/2.$

2) Если $a = 11/4$, то $x = 13/4$.

3) Если $a > 3$, то $x_1 = (2a + 1 + \sqrt{4a - 11})/2$.

4) Если $a < 11/4$, то корней нет.

№ 22. Для каждого a определите число решений уравнения $\sqrt{2|x| - x^2} = a$.

Решение.

1) Если $a < 0$, то уравнение решений не имеет.

2) Пусть $a = 0$: $2|x| - x^2 = 0$, $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2, \\ x = 2. \end{array}\right.$ Получили три решения.

3) При $a > 0$ переходим к уравнению $2|x| - x^2 = a^2$. Сделаем замену: $|x| = t$, где $t \geqslant 0$. Решаем уравнение второй степени $t^2 - 2t + a^2 = 0$, где $t \geqslant 0$, $a > 0$; $D_1 = 1 - a^2$.

а) $a > 1$: решений нет.

б) $a = 1$: $t = 1$, $x = \pm 1$.

в) $0 < a < 1$: $t_1 = 1 + \sqrt{1 - a^2}$, $t_2 = 1 - \sqrt{1 - a^2}$.

Легко видеть, что $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$ при $0 < a < 1$. Поэтому данное уравнение имеет четыре корня: $x_{1,2} = \pm(1 + \sqrt{1 - a^2})$, $x_{3,4} = \pm(1 - \sqrt{1 - a^2})$.

Ответ списывается с оси параметра (рис. 151).

Рис. 151

Ответ: 1) Если $a = 0$, то три решения.
2) Если $a = 1$, то два решения.
3) Если $a \in (0; 1)$, то четыре решения.
4) Если $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, то решений нет.

№ 23. Решите уравнение

$$x = a + \sqrt{x^2 + 2(a + 1)x + 4a}.$$

Решение.

Перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{x^2 + 2(a + 1)x + 4a} = x - a.$$

Теперь перейдем к системе

$$\begin{cases} x - a \geqslant 0, \\ x^2 + 2(a+1)x + 4a = (x-a)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant a, \\ 2(2a+1)x = a(a-4). \end{cases}$$

1) $a = -1/2$: решений нет.

2) $a \neq -1/2$: $x = \dfrac{a(a-4)}{2(2a+1)}$ (*).

Решим теперь неравенство

$\dfrac{a(a-4)}{2(2a+1)} \geqslant a$; $\dfrac{-3a(a+2)}{2a+1} \geqslant 0$,

$\dfrac{a(a+2)}{2a+1} \leqslant 0$ (рис. 152).

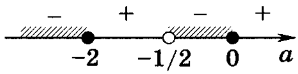


Рис. 152

Заполняем ось ответа (рис. 153).

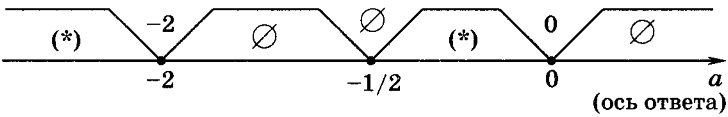


Рис. 153

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \in (-\infty; -2] \cup (-1/2; 0]$,

то $x = \dfrac{a(a-4)}{2(2a+1)}$.

2) В остальных случаях решений нет.

№ 24. Решите уравнение $\sqrt[3]{a^2 + ax} = x + a$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Перейдем к уравнению $a^2 + ax = (x+a)^3$, которое равносильно данному в ООУ:

$(x+a)((x+a)^2 - a) = 0$,

$$\left[\begin{aligned} & x = -a, \\ & (x+a)^2 = a. \end{aligned}\right.$$

Ответ: 1) Если $a \leqslant 0$, то $x = -a$ — единственное решение.
2) Если $a > 0$, то уравнение имеет три корня: $x = -a$, $x = -a + \sqrt{a}$, $x = -a - \sqrt{a}$.

№ 25. При каких значениях параметра n система уравнений $\begin{cases} \sqrt{y} = 1/\sqrt{x}, \\ y = nx + 1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение.
Установим область определения системы (ООС):
$\begin{cases} n \in \mathrm{R}, \\ x > 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$ $\begin{cases} y = nx + 1, \\ \sqrt{nx + 1} = 1/\sqrt{x}, \end{cases}$

$\begin{cases} y = nx + 1, \\ nx + 1 = 1/x, \end{cases}$ $\begin{cases} y = nx + 1, \\ nx^2 + x - 1 = 0. \end{cases}$

1) Пусть $n = 0$: $\begin{cases} y = 1, \\ x = 1. \end{cases}$ В этом случае система имеет единственное решение (1; 1).

2) Пусть $n \neq 0$. Тогда уравнение $nx^2 + x - 1 = 0$ — второй степени, причем $\mathrm{D} = 1 + 4n$.

Нам надо найти такие значения n, при каждом из которых уравнение $nx^2 + x - 1 = 0$ имеет единственный положительный корень.
а) Если $\mathrm{D} = 0$, т. е. $n = -1/4$, то $x = 2 > 0$.
б) Пусть теперь $\mathrm{D} > 0$, т. е. $n > -1/4$.
Тогда $x_1 \cdot x_2 < 0$:

$\begin{cases} n > -1/4, \\ -1/n < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} n > -1/4, \\ n > 0, \end{cases}$ $n > 0.$

Ответ: $\{-1/4\} \cup [0; +\infty)$.

Упражнения для самостоятельного решения

1) Найдите область определения уравнения

а) $\sqrt{-(x-1)^2 - \arccos a} = ax - 3.$

Ответ: $\begin{cases} a = 1, \\ x = 1. \end{cases}$

б) $\sqrt{a(x-a)} = x.$

Ответ: 1) $\begin{cases} a = 0, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a > 0, \\ x \geqslant a. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a < 0, \\ x \leqslant a. \end{cases}$

в) $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x-2}} = \sqrt{x-2a}$.

Ответ: 1) $\begin{cases} a > 1, \\ x \geqslant 2a. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a = 1, \\ x > 2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} a < 1, \\ x \in [2a; 2) \cup (2; +\infty). \end{cases}$

г) $\sqrt{\arcsin x} = \sqrt{\dfrac{-x}{\arcsin a}}$.

Ответ: 1) $\begin{cases} a \in [-1; 0), \\ 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a \in [-1; 0) \cup (0; 1], \\ x = 0. \end{cases}$

д) $\sqrt{(b-2)(x^2-1)} = bx$.

Ответ: 1) $\begin{cases} b = 2, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} b > 2, \\ |x| \geqslant 1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} b < 2, \\ |x| \leqslant 1. \end{cases}$

е) $\sqrt{c-x} + \sqrt{x-2} = 3$.

Ответ: 1) $\begin{cases} c = 2, \\ x = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} c > 2, \\ 2 \leqslant x \leqslant c. \end{cases}$

ж) $\sqrt{x^2 - 2x + n - 3} = n - 3$.

Ответ: 1) $\begin{cases} n \geqslant 4, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} n < 4, \\ x \in (-\infty; 1 - \sqrt{4-n}\,] \cup \\ \cup [1 + \sqrt{4-n}; +\infty). \end{cases}$

2) При каких значениях a уравнение $\sqrt{x} + a + x - a^2 = 2$ имеет корень $x_0 = 1$?

3) Решите уравнения:

а) $\sqrt{x-a} = a$.

б) $\sqrt{bx-3} = b - 3$.

в) $\sqrt{x^2 - bx - 3} = -x$.

г) $(b-1)\sqrt{|x|} = b$.

д) $\dfrac{x+4}{\sqrt{x-a}} = 0$.

е) $\dfrac{c^2-9}{\sqrt{x-2}} = c - 3$.

4) При каких значениях a уравнение $\sqrt{x+a}=a$ имеет два корня?

5) Решите уравнения:

а) $\sqrt{3-ax}=\sqrt{a}$.

б) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{b+x}$.

в) $\sqrt{x-b}=\sqrt{bx-2b}$.

г) $(a^2-1)\sqrt{x-3}=0$.

д) $(2x-b)\sqrt{x+b}=0$.

е) $\sqrt{4x+a}=2x-1$.

ж) $x+\sqrt{x}=a$.

з) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2b-x}=\sqrt{b^2-b}$.

и) $\dfrac{a}{\sqrt{x}-3}=\sqrt{x}+3$.

к) $\sqrt[3]{x^2-3x+a^3+3a^2}=a+1$.

2.4. Более сложные иррациональные уравнения и системы с параметром

№ 1. Решите уравнение $\sqrt{(15x-2)^2}=\sqrt{(5-15x)^2}-a$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a\in \mathrm{R}, \\ x\in \mathrm{R}. \end{cases}$

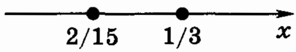


Рис. 154

Освободившись от радикалов, получим уравнение $|15x-2|=|15x-5|-a$, равносильное в ООУ данному. Раскроем модули, для чего отметим на оси нули подмодульных выражений (рис. 154) и решим данное уравнение на каждом из полученных промежутков.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 1/3, \\ 15x-2=15x-5-a, \end{cases} \\ \begin{cases} 2/15<x<1/3, \\ 15x-2=5-15x-a, \end{cases} \\ \begin{cases} x\leqslant 2/15, \\ 2-15x=5-15x-a; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 1/3, \\ a=-3, \end{cases} \\ \begin{cases} 2/15<x<1/3, \\ x=(7-a)/30, \end{cases} \\ \begin{cases} x\leqslant 2/15, \\ a=3; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x \geqslant 1/3,\\ a = -3,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x \leqslant 2/15,\\ a = 3,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x = (7 - a)/30,\\ 2/15 < (7 - a)/30 < 1/3,\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x \geqslant 1/3,\\ a = -3,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x \leqslant 2/15,\\ a = 3,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x = (7 - a)/30,\\ -3 < a < 3 \text{ (рис. 155).}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

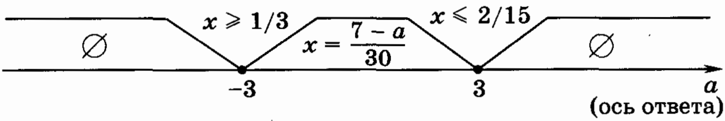


Рис. 155

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \in (-3; 3)$, то $x = (7 - a)/30$.
2) Если $a = -3$, то $x \geqslant 1/3$.
3) Если $a = 3$, то $x \leqslant 2/15$.
4) Если $a \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$, то решений нет.

№ 2. При каких значениях параметра k уравнение $x + 2k\sqrt{x + 1} - k + 3 = 0$ имеет решения?

<u>Решение</u>.

Пусть $\sqrt{x + 1} = t$, где $t \geqslant 0$. Тогда получим уравнение второй степени $t^2 + 2k \cdot t - k + 2 = 0$, у которого $D_1 = k^2 + k - 2$. Узнаем, при каких значениях k полученное уравнение имеет два отрицательных корня:

$$\left\{\begin{array}{l}D_1 > 0,\\ -2k < 0,\\ 2 - k > 0,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}(k + 2)(k - 1) > 0,\\ k > 0,\\ k < 2 \text{ (рис. 156).}\end{array}\right.$$

Получим, что $1 < k < 2$. Поэтому данное уравнение имеет решения, если $k \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \cup \{1\}$.

<u>Ответ</u>: $(-\infty; -2] \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$.

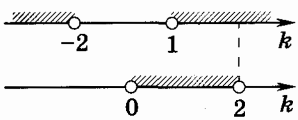


Рис. 156

№ 3. Найдите значение a, если известно, что прямая $y = 2x + 1$ является касательной к графику функции $y = \sqrt{4x^2 + a} + 3x$.

Решение.

Напишем общее уравнение касательной:

$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$,

где x_0 — абсцисса точки касания. С одной стороны, $y'(x_0) = 2$, с другой стороны, $y'(x_0) = \dfrac{4x_0}{\sqrt{4x_0^2 + a}} + 3$.

Составим уравнение $\dfrac{4x_0}{\sqrt{4x_0^2 + a}} + 3 = 2$:

$\sqrt{4x_0^2 + a} = -4x_0$, $\begin{cases} x_0 \leqslant 0, \\ 4x_0^2 + a = 16x_0^2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_0 \leqslant 0, \\ a = 12x_0^2. \end{cases}$

Тогда

$y_0 = \sqrt{16x_0^2} + 3x_0$, $y_0 = -4x_0 + 3x_0$, $y_0 = -x_0$. Подставим выражения для y_0, $y'(x_0)$ в общее уравнение касательной: $y = -x_0 + 2(x - x_0)$, $y = 2x - 3x_0$. И далее:

$2x - 3x_0 = 2x + 1$, $x_0 = -1/3$.

Откуда $a = 4/3$.

Ответ: 4/3.

№ 4. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{1 - 2x} = ax$ не имеет решений на $[-4; 0]$?

Решение.

Будем решать графически в системе координат (xOy). Построим графики функций $y = \sqrt{1 - 2x}$ и $y = ax$ (рис. 157).

Легко видеть, что при $a \geqslant 0$ уравнение не имеет решений на $[-4; 0]$. Пусть $a < 0$. Прямая, проходящая через начало координат и точку $(-4; 3)$, задается уравнением $y = -3x/4$. Если $a > -3/4$ (например, $a = -1/4$), то данное уравнение не имеет решений на $[-4; 0]$.

Ответ: $a > -3/4$.

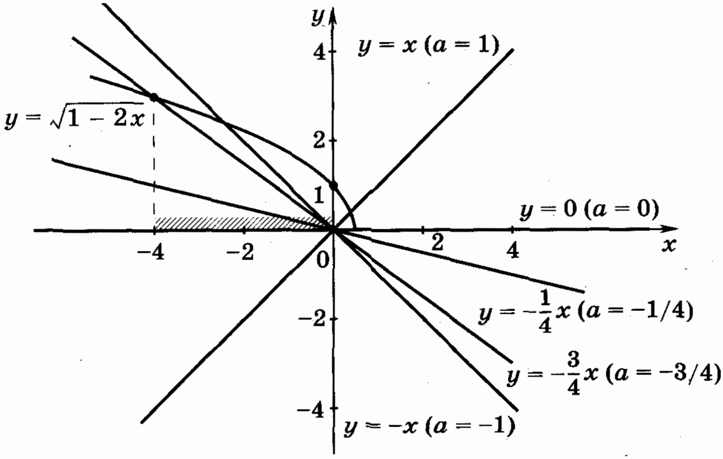


Рис. 157

№ 5. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2 - x^2}.$$

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) Пусть $a = 0$: $5\sqrt[3]{x^2} = -5\sqrt[3]{x^2}$, $x = 0$.

2) Если $a \neq 0$, то $x = a$ не является корнем данного уравнения, а потому $\sqrt[3]{(a-x)^2} \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\sqrt[3]{(a-x)^2}$:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2} + 4 = 5\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}.$$

Пусть $t = \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}$, тогда $\left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t = 1; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} = 4, \\ \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} = 1, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{63}{65}a, \\ x = 0 \text{ (рис. 158).} \end{array}\right.$$

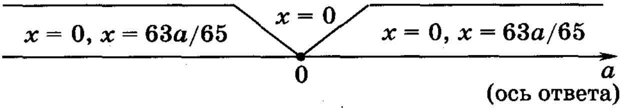


Рис. 158

<u>Ответ</u>: 1) Если $a = 0$, то $x = 0$.

2) Если $a \neq 0$, то $x = 0$, $x = \frac{63}{65}a$.

№ 6. Решите уравнение $x + \sqrt{a^2 + x^2} = \dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ a^2 + x^2 > 0. \end{cases}$

Умножим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + x^2}$:

$x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 + x^2 = 5a^2$, $x\sqrt{a^2 + x^2} = 4a^2 - x^2$. Возведя обе части уравнения в квадрат, перейдем к уравнению-следствию:

$x^2(a^2 + x^2) = (4a^2 - x^2)^2$, $9a^2x^2 = 16a^4$.

Рассмотрим два случая.

1) $a = 0$. Исходное уравнение примет вид

$x + \sqrt{x^2} = 0/\sqrt{x^2}$, $x + |x| = 0/|x|$, $x < 0$.

2) $a \neq 0$; $x^2 = 16a^2/9$, $x_1 = 4a/3$, $x_2 = -4a/3$.

<u>Проверка</u>.

1) $x_1 = 4a/3$; $4a/3 + \sqrt{a^2 + (4a/3)^2} = \dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2 + (4a/3)^2}}$,

$4a/3 + 5|a|/3 = 3a^2/|a|$, $a = |a|$. Если $a > 0$, то $x_1 = 4a/3$ — корень уравнения. Если $a < 0$, то x_1 не является корнем данного уравнения (рис. 159).

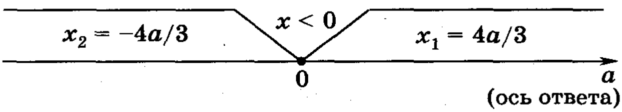


Рис. 159

2) $x_2 = -4a/3$;

$-4a/3 + \sqrt{a^2 + (-4a/3)^2} = 5a^2/\sqrt{a^2 + (-4a/3)^2}$,

$-4a/3 + 5|a|/3 = 3a^2/|a|, \quad -a = |a|$.

Если $a < 0$, то x_2 — корень данного уравнения, а при $a > 0$ x_2 не является корнем (рис. 159).

Ответ: 1) Если $a = 0$, то $x < 0$.
2) Если $a > 0$, то $x = 4a/3$.
3) Если $a < 0$, то $x = -4a/3$.

№ 7. Решите уравнение $\sqrt{2x - a} = 4 - x$.

Решение.

1 способ. $\begin{cases} 2x - a = (4 - x)^2, \\ x \leqslant 4, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 10x + 16 + a = 0, \\ x \leqslant 4. \end{cases}$

$D_1 = 25 - 16 - a = 9 - a$.

а) $D_1 = 0$, $a = 9$: $x_{1,2} = 5$. Но $5 > 4$. Поэтому в этом случае исходное уравнение решений не имеет.

б) $D_1 < 0$, $a > 9$: решений нет.

в) $D_1 > 0$, $a < 9$: $x_1 = 5 - \sqrt{9 - a}$; $x_2 = 5 + \sqrt{9 - a}$.

1) $\begin{cases} x_1 = 5 - \sqrt{9 - a}, \\ 5 - \sqrt{9 - a} \leqslant 4, \\ a < 9, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 5 - \sqrt{9 - a}, \\ \sqrt{9 - a} \geqslant 1, \\ a < 9, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 5 - \sqrt{9 - a}, \\ a \leqslant 8. \end{cases}$

2) $x_2 = 5 + \sqrt{9 - a}$. Легко видеть, что $x_2 > 5$ при $a < 9$ (рис. 160).

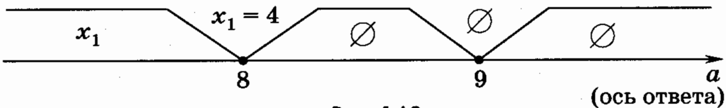


Рис. 160

Ответ: 1) Если $a \leqslant 8$, то $x = 5 - \sqrt{9 - a}$.
2) Если $a > 8$, то решений нет.

2 способ. $\begin{cases} x^2 - 10x + 16 + a = 0, \\ x \leqslant 4, \end{cases}$

$\begin{cases} a = -x^2 + 10x - 16, \\ x \leqslant 4. \end{cases}$

Решаем графически в системе координат (xOy). Сначала построим график функции $f(x) = -x^2 + 10x - 16$, если $x \leqslant 4$ (1). Уравнение $y = a$ задает семейство прямых, параллельных оси Ox.

Если $a > 8$, то прямая с уравнением $y = a$ не пересекает график функции (1). Если $a \leqslant 8$, то любая прямая с уравнением $y = a$ пересекает график функции (1) в одной точке, абсцисса которой и является решением: $x = 5 - \sqrt{9 - a}$ (рис. 161).

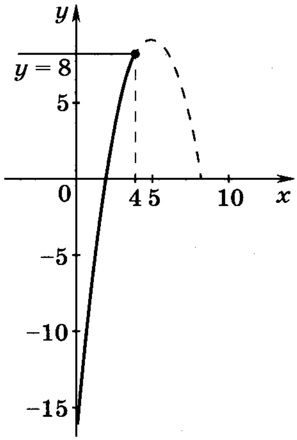


Рис. 161

3 способ. Опять начинаем с системы

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 16 + a = 0, \\ x \leqslant 4. \end{cases}$$

1) Если $a \geqslant 9$, то решений нет.

2) $D_1 > 0$, $a < 9$.

Воспользуемся теоремами о расположении корней квадратного трехчлена.

Пусть $f(x) = x^2 - 10x + 16 + a$ (рис. 162). Пунктирная стрелка от 4 к x_1 означает, что 4 может совпасть с x_1. В этом случае $f(4) = 0$.

Нас будет интересовать только один случай.

$f(4) \leqslant 0$,

$16 - 40 + 16 + a \leqslant 0$,

$a \leqslant 8$.

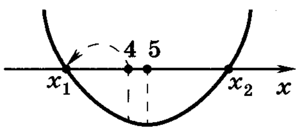


Рис. 162

Если $a \leqslant 8$, то уравнение имеет один корень. В остальных случаях решений нет.

№ 8. При каких значениях параметра k уравнение $x\sqrt{kx - x^2} + 1 = 0$ имеет решения?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} k \in \mathrm{R}, \\ kx - x^2 \geqslant 0, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} k \in \mathrm{R}, \\ x(k - x) \geqslant 0. \end{cases}$

Проанализируем ООУ, выделив из нее подмножество, на котором могут быть решения. Заметим сначала, что выражение $x\sqrt{kx - x^2} + 1$ может быть равно нулю при $x < 0$ и $x(k - x) \geqslant 0$. Откуда следует, что $k - x \leqslant 0$. А потому $x \geqslant k$, а значит, $k < 0$. Итак, будем решать данное уравнение на множестве решений системы неравенств $\begin{cases} k \leqslant x < 0, \\ k < 0. \end{cases}$ Уединим радикал и перейдем к системе

$$\begin{cases} x^2(kx - x^2) = 1, \\ k < 0, \\ k \leqslant x < 0: \end{cases} \qquad \begin{cases} x^4 - kx^3 + 1 = 0, \\ k < 0, \\ k \leqslant x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^4 - kx^3 + 1$.

$f'(x) = 4x^3 - 3kx^2$; $f'(x) = x^2(4x - 3k)$. $x = 3k/4$ и $x = 0$ — критические точки функции $f(x)$ (рис. 163).

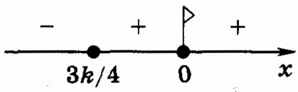


Рис. 163

$x_0 = 3k/4$ — точка минимума функции.

Покажем схематично, как должны располагаться графики функции $f(x)$ на интервале $[k; 0)$, чтобы данное уравнение имело решения (рис. 164).

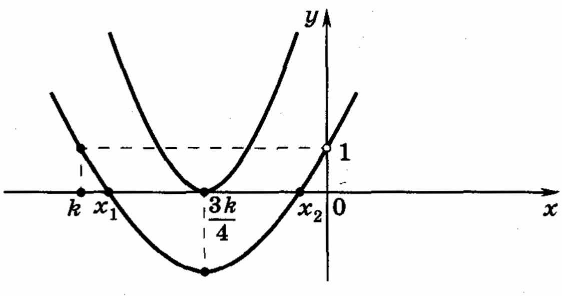


Рис. 164

Итак, данное уравнение имеет решения, если $f(x_0) \leqslant 0$; $f(x_0) = -27k^4/256 + 1$, $-27k^4/256 + 1 \leqslant 0$, $k^4 \geqslant 256/27$, $|k| \geqslant 4/\sqrt[4]{27}$, $k \leqslant -4/\sqrt[4]{27}$. Заметим, что $f(k) = 1$, $f(k) > 0$.

Ответ: $k \leqslant -4/\sqrt[4]{27}$.

№ 9. Решите уравнение $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x + a \geqslant 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Данное уравнение в своей области определения равносильно системе $\begin{cases} x + a = a^2 - 2a\sqrt{x} + x, \\ \sqrt{x} \leqslant a; \end{cases}$

$\begin{cases} 2a\sqrt{x} = a(a-1), \\ \sqrt{x} \leqslant a. \end{cases}$

Рассмотрим ряд случаев.

1) Если $a = 0$ или $a = 1$, то $x = 0$.

2) Перепишем систему в виде $\begin{cases} 2\sqrt{x} = a - 1, \\ \sqrt{x} \leqslant a, \\ a \neq 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$

Если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, то решений нет.

Пусть теперь $a > 1$:

$\begin{cases} \sqrt{x} = (a-1)/2, \\ (a-1)/2 \leqslant a, \\ a > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x} = (a-1)/2, \\ a > 1, \end{cases}$

$\begin{cases} x = \left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2, \\ a > 1 \text{ (рис. 165).} \end{cases}$

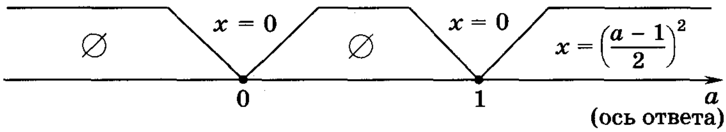


Рис. 165

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \geqslant 1$, то $x = ((a-1)/2)^2$.
2) Если $a = 0$, то $x = 0$.
3) Если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, то решений нет.

№ 10. Решите уравнение $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = a$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Легко видеть, что при $a \leqslant 0$ уравнение решений не имеет ($\sqrt{|x|+1} > \sqrt{|x|}$). Перепишем данное уравнение, где $a > 0$, в виде $\sqrt{|x|+1} = \sqrt{|x|} + a$ и возведем обе части полученного уравнения в квадрат: $|x| + 1 = |x| + 2a\sqrt{|x|} + a^2$, $2a\sqrt{|x|} = 1 - a^2$, $\sqrt{|x|} = \dfrac{1-a^2}{2a}$. Если $a > 1$, то последнее уравнение (и данное) решений не имеют. Если $a \in (0; 1]$, то $|x| = \left(\dfrac{1-a^2}{2a}\right)^2$, $x = \pm\left(\dfrac{1-a^2}{2a}\right)^2$ (*) (рис. 166).

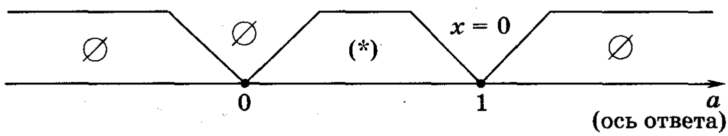


Рис. 166

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \in (0; 1]$, то $x = \pm\left(\dfrac{1-a^2}{2a}\right)^2$.

2) В остальных случаях решений нет.

№ 11. Решите уравнение $\sqrt{1-x^2}+x=a$.

Решение.

1 способ. Представим данное уравнение в виде $\sqrt{1-x^2}=a-x$, а затем возведем обе части полученного уравнения в квадрат. При этом возможно появление посторонних решений. Необходима проверка.

Решаем уравнение $2x^2-2ax+a^2-1=0$, являющееся следствием данного.

а) $D_1<0$: $2-a^2<0$, $|a|>\sqrt{2}$. Решений нет.

б) $D_1=0$: 1) $a=\sqrt{2}$, $x_{1,2}=\sqrt{2}/2$.

Проверка показывает, что при $a=\sqrt{2}$

$x_{1,2}=\sqrt{2}/2$ — корни уравнения.

2) $a=-\sqrt{2}$, $x_{1,2}=-\sqrt{2}/2$. Тогда $-\sqrt{2}+\sqrt{2}/2<0$.

В этом случае корней нет.

в) $D_1>0$: $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$; $x_1=(a-\sqrt{2-a^2})/2$, $x_2=$ $=(a+\sqrt{2-a^2})/2$ (рис. 167).

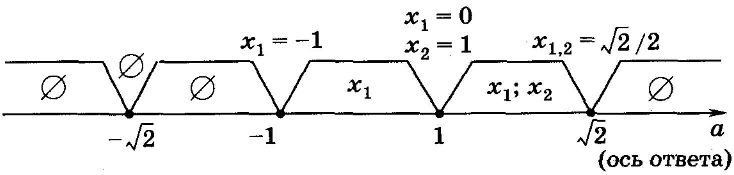


Рис. 167

Для последнего случая делаем проверку.

Проверяем x_1: $\sqrt{1-\dfrac{2-2a\sqrt{2-a^2}}{4}}=a-\dfrac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$,

$\sqrt{(a+\sqrt{2-a^2})^2}=a+\sqrt{2-a^2}$,

$|a+\sqrt{2-a^2}|=a+\sqrt{2-a^2}$,

$\begin{cases} a + \sqrt{2 - a^2} \geqslant 0, \\ -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}. \end{cases}$ Решив эту систему, получим, что $-1 \leqslant a < \sqrt{2}$.

Проверяем x_2: подставляем в данное уравнение вместо x выражение $(a + \sqrt{2 - a^2})/2$. Получим $|a - \sqrt{2 - a^2}| = a - \sqrt{2 - a^2}$:

$$\begin{cases} a - \sqrt{2 - a^2} \geqslant 0, \\ -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 - a^2 \leqslant a^2, \\ 0 \leqslant a < \sqrt{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a| \geqslant 1, \\ 0 \leqslant a < \sqrt{2}, \end{cases} \qquad 1 \leqslant a < \sqrt{2}.$$

Ответ: 1) Если $-1 \leqslant a < 1$, то $x_1 = (a - \sqrt{2 - a^2})/2$.

2) Если $1 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$, то $x_1 = (a - \sqrt{2 - a^2})/2$, $x_2 = (a + \sqrt{2 - a^2})/2$.

3) Если $a \in (-\infty; -1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$, то решений нет.

2 способ. Уравнение $\sqrt{1 - x^2} = a - x$ равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - x^2 = a^2 - 2ax + x^2, \\ x \leqslant a; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0, \\ x \leqslant a. \end{cases}$$

а) $D_1 < 0$: $|a| > \sqrt{2}$. Решений нет.

б) $D_1 = 0$:

1) $a = \sqrt{2}$, $\begin{cases} x_{1,2} = \sqrt{2}/2, \\ \sqrt{2}/2 \leqslant \sqrt{2}, \end{cases}$ $x_{1,2} = \sqrt{2}/2$.

2) $a = -\sqrt{2}$, $\begin{cases} x_{1,2} = -\sqrt{2}/2, \\ -\sqrt{2}/2 \leqslant -\sqrt{2}. \end{cases}$ Эта система несовместна.

в) $D_1 > 0$: $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$.

$$1)\ \begin{cases} x_1 = (a - \sqrt{2 - a^2})/2, \\ (a - \sqrt{2 - a^2})/2 \leqslant a, \\ |a| < \sqrt{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = (a - \sqrt{2 - a^2})/2, \\ \sqrt{2 - a^2} > -a, \\ |a| < \sqrt{2}, \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = (a - \sqrt{2 - a^2})/2, \\ 0 \leqslant a < \sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = (a - \sqrt{2 - a^2})/2, \\ -\sqrt{2} < a < 0, \\ 2 - a^2 \geqslant a^2. \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{cases} x_1 = (a - \sqrt{2 - a^2})/2, \\ \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant a < \sqrt{2}, \\ -1 \leqslant a < 0, \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = (a - \sqrt{2 - a^2})/2, \\ -1 \leqslant a < \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x_2 = (a + \sqrt{2 - a^2})/2, \\ -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}, \\ x \leqslant a, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = (a + \sqrt{2 - a^2})/2, \\ -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}, \\ \sqrt{2 - a^2} \leqslant a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = (a + \sqrt{2 - a^2})/2, \\ -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}, \\ a \geqslant 0, \\ 2 - a^2 \leqslant a^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = (a + \sqrt{2 - a^2})/2, \\ -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}, \\ a \geqslant 0, \\ |a| \geqslant 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = (a + \sqrt{2 - a^2})/2, \\ 1 \leqslant a < \sqrt{2}. \end{cases}$$

<u>3 способ</u>. Метод замены переменной.

Пусть $y = a - x$. Тогда данное уравнение примет вид $\sqrt{1 - (a - y)^2} = y$. А это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - a^2 + 2ay - y^2 = y^2, \\ y \geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2y^2 - 2ay + a^2 - 1 = 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет действительные корни, если $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$.

Рассмотрим ряд случаев.

1) $-\sqrt{2} \leqslant a < -1$: оба корня уравнения отрицательны, а значит, исходное уравнение решений не имеет.

2) $a = -1$: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y = -1, \end{array} \right. \\ y \geqslant 0. \end{cases}$ $y = 0$. Тогда $x = -1$.

3) $-1 < a < 1$: корни уравнения системы разных знаков. Учитывая, что $y \geqslant 0$, выбираем

$y = (a + \sqrt{2 - a^2})/2$, откуда $x = (a - \sqrt{2 - a^2})/2$.

4) $a = 1$: $\begin{cases} y = 0, \\ y = 1. \end{cases}$ Поэтому $\begin{cases} x = 1, \\ x = 0. \end{cases}$

5) $1 < a \leqslant \sqrt{2}$. Оба корня уравнения системы положительны: $y = (a \pm \sqrt{2 - a^2})/2$, а значит,

$x = (a \pm \sqrt{2 - a^2})/2$.

<u>4 способ</u>. Опять воспользуемся методом замены переменной, но в качестве y возьмем $\sqrt{1 - x^2}$. Тогда $1 - x^2 = y^2$, $x^2 = 1 - y^2$, где $y \geqslant 0$. Получим систему

$$\begin{cases} y + x = a, \\ \sqrt{1 - x^2} = y, \\ y \geqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y + x = a, \\ x^2 + y^2 = 1, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = a, \\ (x + y)^2 - 2xy = 1, \\ y \geqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = a, \\ xy = (a^2 - 1)/2, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Воспользуемся теоремой, обратной теореме Виета:

$t^2 - at + \dfrac{a^2 - 1}{2} = 0$, $D = 2 - a^2$.

а) $D < 0, |a| > \sqrt{2}$. Решений нет.

б) $D = 0$: 1) $a = \sqrt{2}$, $t_{1,2} = \sqrt{2}/2$. 2) $a = -\sqrt{2}$, $t_{1,2} = -\sqrt{2}/2$, но $-\sqrt{2}/2 < 0$.

в) $D > 0, |a| < \sqrt{2}$:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = (a - \sqrt{2 - a^2})/2, \\ y_1 = (a + \sqrt{2 - a^2})/2, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = (a + \sqrt{2 - a^2})/2, \\ y_2 = (a - \sqrt{2 - a^2})/2, \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = (a - \sqrt{2 - a^2})/2, \\ (a + \sqrt{2 - a^2})/2 \geqslant 0, \\ |a| < \sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = (a + \sqrt{2 - a^2})/2, \\ (a - \sqrt{2 - a^2})/2 \geqslant 0, \\ |a| < \sqrt{2}, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = (a - \sqrt{2 - a^2})/2, \\ -1 \leqslant a < \sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = (a + \sqrt{2 - a^2})/2, \\ 1 \leqslant a < \sqrt{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

5 способ. Тригонометрическая подстановка. Учитывая, что областью определения функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является отрезок $[-1; 1]$, можно ввести замену, положив $x = \sin t$, и считать, что $-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Переходим к уравнению $\sin t + \cos t = a$. Делим обе части последнего уравнения на $\sqrt{2}$: $\sin(t + \pi/4) = a/\sqrt{2}$.

1) Если $|a| > \sqrt{2}$, то данное уравнение не имеет решений.

2) Пусть $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$. Из соотношений $-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2$ следует, что $-\pi/4 \leqslant t + \pi/4 \leqslant 3\pi/4$. И тогда $-\sqrt{2}/2 \leqslant \sin(x + \pi/4) \leqslant 1$.

Поэтому, для того чтобы данное уравнение имело решения, необходимо и достаточно, чтобы $-1/\sqrt{2} \leqslant a/\sqrt{2} \leqslant 1$ или $-1 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$. Значит, если $a \in [-\sqrt{2}; 1)$, то данное уравнение решений не имеет.

а) Пусть $-\pi/4 \leqslant t + \pi/4 < \pi/4$, т. е.

$-\sqrt{2}/2 \leqslant \sin(t + \pi/4) < \sqrt{2}/2$; отсюда $-1 \leqslant a < 1$. Тогда данное уравнение имеет один корень $t + \pi/4 = \arcsin(a/\sqrt{2})$; $t = \arcsin(a/\sqrt{2}) - \pi/4$,

$x = \sin t = \sin(\arcsin(a/\sqrt{2}) - \pi/4) =$

$= (a/\sqrt{2}) \cdot (1/\sqrt{2}) - \sqrt{1 - a^2/2} \cdot (1/\sqrt{2}) =$

$= (a - \sqrt{2 - a^2})/2.$

б) Пусть теперь $\pi/4 \leqslant t + \pi/4 \leqslant 3\pi/4$:

$1/\sqrt{2} \leqslant \sin(t + \pi/4) \leqslant 1$, т. е. $1 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$.

Уравнение имеет два корня:

$t + \pi/4 = \arcsin(a/\sqrt{2})$, откуда $x = (a - \sqrt{2 - a^2})/2$;

$t + \pi/4 = \pi - \arcsin(a/\sqrt{2})$,

откуда $t = 3\pi/4 - \arcsin(a/\sqrt{2})$,

$x = \sin t = (1/\sqrt{2}) \cdot \sqrt{1 - a^2/2} + (1/\sqrt{2}) \cdot a/\sqrt{2} =$

$= (a + \sqrt{2 - a^2})/2.$

6 способ. Геометрическое решение.

Сведем решение уравнения $\sqrt{1 - x^2} = a - x$ к нахождению абсцисс точек пересечения графиков:

$y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = a - x$.

Уравнение вида $y = \sqrt{1 - x^2}$, где $y \geqslant 0$, является уравнением единичной полуокружности: $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$. (1)

Уравнение $x + y = a$ (2) задает семейство прямых, параллельных биссектрисе углов II и IV четвертей (рис. 168).

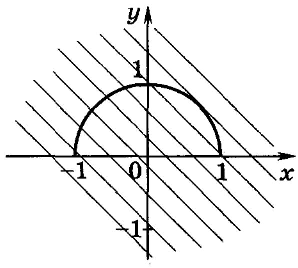


Рис. 168

1) Если $a < -1$, то линии (1) и (2) не пересекаются. Данное уравнение решений не имеет.

2) Если $a = -1$, то линии пересекаются в точке $(-1; 0)$. Уравнение имеет один корень $x = -1$.

3) Если $-1 < a < 1$, то линии (1) и (2) пересекаются в одной точке. Решая систему $\begin{cases} 1 - x^2 = a - x, \\ x + y \geqslant 0, \end{cases}$ выбираем для x наименьшее значение корня: $x = (a - \sqrt{2 - a^2})/2$.

4) Если $a = 1$, то линии (1) и (2) пересекаются в двух точках $(0; 1)$ и $(1; 0)$. Уравнение имеет два корня: $x = 0$ и $x = 1$.

5) Если $1 < a < \sqrt{2}$, то линии (1) и (2) пересекаются в двух точках. Их абсциссы являются корнями данного уравнения: $x = (a \pm \sqrt{2 - a^2})/2$.

6) Если $a = \sqrt{2}$, то прямая серии (2) касается полуокружности (1) в точке $(1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$. Данное уравнение имеет один корень: $x = 1/\sqrt{2}$.

7) Если $a > \sqrt{2}$, то линии (1) и (2) не пересекаются. Данное уравнение не имеет корней.

<u>7 способ</u>. Использование теорем о расположении корней квадратного трехчлена.

Переходим к системе $\begin{cases} 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0, \\ x \leqslant a. \end{cases}$

Решая уравнение системы, рассматриваем традиционно три случая.

а) $D_1 = 0$, $2 - a^2 = 0$, $a = \pm\sqrt{2}$.

$a = \sqrt{2}$: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

$a = -\sqrt{2}$: решений нет.

б) $D_1 < 0$, $|a| > \sqrt{2}$: решений нет.

в) $D_1 > 0$: $|a| < \sqrt{2}$.

В этом случае воспользуемся теоремами о расположении корней квадратного трехчлена. Пусть $f(x) = 2x^2 - 2ax + a^2 - 1$. Нас будут интересовать только два случая расположения парабол.

1) Составим и решим систему

$$\begin{cases} D_1 > 0, \\ a/2 < a, \\ f(a) \geqslant 0 \text{ (рис. 169)}; \end{cases} \quad \begin{cases} |a| < \sqrt{2}, \\ a > 0, \\ a^2 - 1 \geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a < \sqrt{2}, \\ a > 0, \\ a \geqslant 1, \end{cases}$$

$1 \leqslant a < \sqrt{2}$.

Тогда данное уравнение имеет два корня:

$x_{1,2} = (a \pm \sqrt{2 - a^2})/2$.

2) $\begin{cases} f(a) \leqslant 0, \\ a \neq 1 \text{ (рис. 170)}, \end{cases} \begin{cases} |a| \leqslant 1, \\ a \neq 1, \end{cases} -1 \leqslant a < 1.$

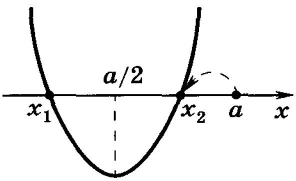


Рис. 169

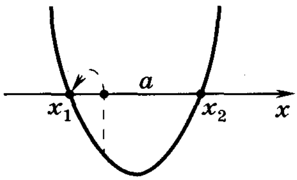


Рис. 170

Уравнение имеет один корень

$x_1 = (a - \sqrt{2 - a^2})/2$.

Рассматриваемое уравнение можно решить и другими методами. Например, методом рационализации, когда применяется вторая подстановка Эйлера. В нашем случае полагаем, что $\sqrt{1-x^2} = |1 - zx|$.

Можно от системы $\begin{cases} 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0, \\ x \leqslant a \end{cases}$ перейти

к системе $\begin{cases} a^2 - 2ax + 2x^2 - 1 = 0, \\ a \geqslant x, \end{cases}$ где первое уравнение системы является уже квадратным относительно a. Но практически эти методы оказываются достаточно трудоемкими.

Поиски других методов решения данного уравнения читатель может продолжить самостоятельно.

№ 12. Решите уравнение $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} = a$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

Решим данное уравнение графически. Рассмотрим функции $y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1}$ (1) и $y = a$(2).

Строим сначала схематично график функции (1) с областью определения $\mathrm{D}(y) = [1; +\infty)$, причем $y(1) = \sqrt{3}$ (рис. 171).

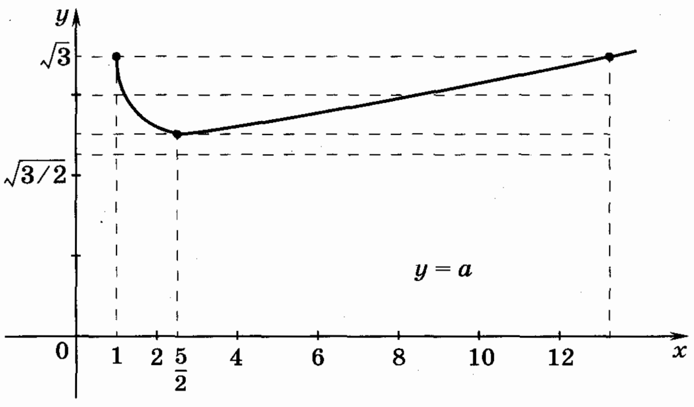


Рис. 171

Найдем критические точки функции (1), для чего сначала ищем производную y':

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1} - \sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{x-1}}.$$

У этой функции единственная критическая точка (где $y' = 0$):

$$2\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+1},\ x = 5/2.$$

Если $x > 5/2$, то $y' > 0$. Если $1 < x < 5/2$, то $y' < 0$. Поэтому $x = 5/2$ — точка минимума функции. Тогда минимум функции (и наименьшее значение) равно

$$\sqrt{6} - \sqrt{3/2} = \sqrt{3}(\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}) = \sqrt{3/2}.$$

Уравнение $y = a$ задает семейство прямых, параллельных оси абсцисс.

Если $a < \sqrt{3/2}$, прямая $y = a$ не пересекает график функции (1). Поэтому решений нет.

Если $a = \sqrt{3/2}$, то уравнение имеет единственное решение, равное $5/2$.

Пусть $a > \sqrt{3/2}$. Тогда прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1}$ в двух точках или одной. Найдем корни уравнения при $a > \sqrt{3/2}$:

$$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x-1} + a,\ 2x + 1 = x - 1 + 2a\sqrt{x-1} + a^2,$$

$$2a\sqrt{x-1} = x + 2 - a^2,\ \ x^2 - 2x(3a^2 - 2) + a^4 + 4 = 0.$$

$D_1 = 4a^2(2a^2 - 3)$. Видим, что $D_1 > 0$ при $a > \sqrt{3/2}$.

$$x_1 = 3a^2 - 2 - 2a\sqrt{2a^2 - 3};$$

$$x_2 = 3a^2 - 2 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}.$$

Если $\sqrt{3/2} < a \leqslant \sqrt{3}$, то уравнение имеет два корня: x_1 и x_2.

Если же $a > \sqrt{3}$, то один корень (x_2).

Нанесем результаты на ось ответа (рис. 172).

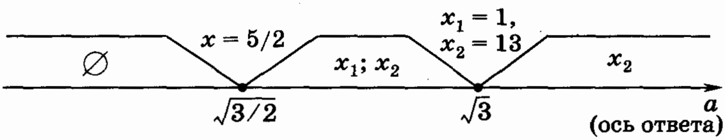


Рис. 172

Ответ: 1) Если $\sqrt{3/2} < a \leqslant \sqrt{3}$, то

$x_1 = 3a^2 - 2 - 2a\sqrt{2a^2 - 3}$,

$x_2 = 3a^2 - 2 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}$.

2) Если $a = \sqrt{3/2}$, то $x = 5/2$.

3) Если $a > \sqrt{3}$, то

$x_2 = 3a^2 - 2 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}$.

4) Если $a < \sqrt{3/2}$, то решений нет.

№ 13. При каких значениях a система уравнений

$\begin{cases} x + \sqrt{y - a - 2} = 0, \\ y^2 - x^2 = a(2x + a) \end{cases}$ имеет два решения?

Решение.

Перепишем систему в виде

$\begin{cases} x = -\sqrt{y - a - 2}, \\ y^2 = (x + a)^2. \end{cases}$ Решаем совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\sqrt{y - a - 2}, \\ y = x + a, \\ x \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{y - a - 2}, \\ y = -x - a, \\ x \leqslant 0, \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y = x + a, \\ x = -\sqrt{x - 2}, \\ x \leqslant 0, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x = -\sqrt{-x - 2a - 2}, \\ y = -x - a, \\ x \leqslant 0. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Система (1) решений не имеет. Решаем уравнение $x = -\sqrt{-x-2a-2}$, где $x \leqslant 0$ из системы (2): $x^2 = -x - 2a - 2$, $x^2 + x + 2a + 2 = 0$. Для того чтобы последнее уравнение имело два неположительных решения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия

$$\begin{cases} D > 0, \\ 2a+2 \geqslant 0, \end{cases} \begin{cases} -7-8a > 0, \\ a \geqslant -1, \end{cases} \begin{cases} a < -7/8, \\ a \geqslant -1, \end{cases} \quad -1 \leqslant a < -7/8.$$

<u>Ответ</u>: $[-1; -7/8)$.

№ 14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = a, \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = a^2, \text{ где } a > 0. \end{cases}$$

<u>Решение</u>.

Возведем обе части первого уравнения в квадрат:

$$\begin{cases} x + y - 2\sqrt{x^2-y^2} + x - y = a^2, \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = a^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y^2} = x - a^2/2, \\ \sqrt{x^2+y^2} + x - a^2/2 = a^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 3a^2/2 - x, \\ \sqrt{x^2-y^2} = x - a^2/2. \end{cases}$$

Возведем обе части каждого из уравнений последней системы в квадрат:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9a^4/4 - 3a^2x + x^2, \\ x^2 - y^2 = x^2 - xa^2 + a^4/4, \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = 9a^4/4 - 3a^2x, \\ y^2 = xa^2 - a^4/4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5a^2/8, \\ \left[\begin{array}{l} y = a^2\sqrt{3/8}, \\ y = -a^2\sqrt{3/8}, \end{array}\right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 5a^2/8, \\ y = a^2\sqrt{3/8}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5a^2/8, \\ y = -a^2\sqrt{3/8}. \end{cases} \end{array}\right.$$

При решении системы мы не следили за равносильностью переходов, кроме того, при возведении обеих частей уравнения в квадрат получается уравнение-следствие. Поэтому могло произойти приобретение посторонних решений. Необходима проверка. Выполните проверку самостоятельно.

Ответ: при любых $a > 0$ решением системы является пара $(5a^2/8;\ a^2\sqrt{3/8})$.

№ 15. Решите уравнение

$$\frac{1 + x - \sqrt{2x + x^2}}{1 + x + \sqrt{2x + x^2}} = a^3\frac{\sqrt{2 + x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{x}}.$$

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{1 + x - \sqrt{2x + x^2}}{1 + x + \sqrt{2x + x^2}} = \frac{2 + x + x - 2\sqrt{(2 + x)x}}{2 + x + x + 2\sqrt{(2 + x)x}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2 + x} - \sqrt{x})^2}{(\sqrt{2 + x} + \sqrt{x})^2}.$$

Тогда уравнение примет вид

$$\frac{(\sqrt{2 + x} - \sqrt{x})^2}{(\sqrt{2 + x} + \sqrt{x})^2} = a^3\frac{\sqrt{2 + x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{x}},\ \left(\frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{x}}{\sqrt{2 + x} + \sqrt{x}}\right)^3 = a^3,$$

$$\frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{x}}{\sqrt{2 + x} + \sqrt{x}} = a,\ \sqrt{2 + x}\,(1 - a) = \sqrt{x}\,(1 + a).$$

Рассмотрим ряд случаев.

1) $(1 - a)(1 + a) < 0$, $\left[\begin{array}{l} a > 1, \\ a < -1. \end{array}\right.$ Уравнение решений не имеет.

2) $a = 1$: $x = 0$.

3) $a = -1$: $x = -2$. Но это значение x не входит в ООУ. Поэтому при $a = -1$ решений нет.

4) $-1 < a < 1$. Возведем обе части последнего уравнения в квадрат: $(2 + x)(1 - a)^2 = x(1 + a)^2$, или $2ax = (1 - a)^2$.

а) Если $a = 0$, то решений нет.

б) Если $-1 < a < 0$, то $x = \dfrac{(1-a)^2}{2a}$. Найденное значение x не удовлетворяет области определения.

в) $0 < a < 1$: $x = \dfrac{(1-a)^2}{2a}$. Заметим, что в этом случае $\dfrac{(1-a)^2}{2a} > 0$.

Результаты нанесем на ось параметра (рис. 173).

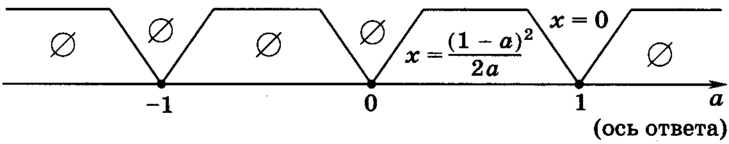


Рис. 173

Ответ: 1) Если $0 < a \leqslant 1$, то $x = \dfrac{(1-a)^2}{2a}$.

2) В остальных случаях решений нет.

№ 16. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} y = 1 + x^2/a^3, \\ y = 4\sqrt{x} \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение:

ООС: $\begin{cases} a \neq 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

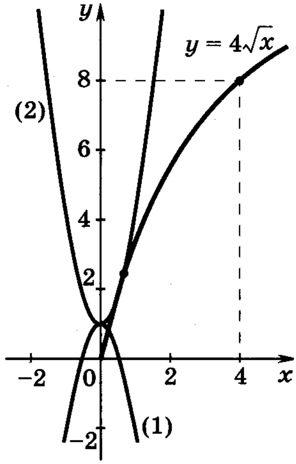


Рис. 174

Будем решать данную систему графически. Сначала построим график функции $y = 4\sqrt{x}$ (рис. 174).

Уравнение $y = 1 + x^2/a^3$, где $a \neq 0$, задает семейство парабол с вершинами в точке (0; 1). Нас будут интересовать параболы с ветвями, направленными вниз (1), а также парабола, ветви которой направлены вверх

($a > 0$), и имеющая с графиком функции $y = 4\sqrt{x}$ общую касательную (2).

Если $a < 0$, то данная система имеет единственное решение.

Пусть теперь $a > 0$. И пусть $(x_0; y_0)$ — координаты точки касания. Для графика функции $y = 4\sqrt{x}$ имеем $y_0 = 4\sqrt{x_0}$, $k = 2/\sqrt{x_0}$, где k — угловой коэффициент касательной. Для параболы с уравнением $y = 1 + x^2/a^3$ находим $y_0 = 1 + x_0^2/a^3$, $k = 2x_0/a^3$. Составим систему

$$\begin{cases} 2/\sqrt{x_0} = 2x_0/a^3, \\ 4\sqrt{x_0} = 1 + x_0^2/a^3, \\ a > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0^{3/2} = a^3, \\ 4\sqrt{x_0} = 1 + x_0^2/a^3, \\ a > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = a^2, \\ 4a = 1 + a, \\ a > 0, \end{cases} \qquad a = 1/3.$$

<u>Ответ</u>: при $a = 1/3$ и всех $a < 0$.

№ 17. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2 + y^2} - 2ay - 3 = 0, \\ x\sqrt{x^2 + y^2} = 2ax. \end{cases}$$

<u>Решение</u>.

ООС: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Рассмотрим второе уравнение системы. Если $x \neq 0$, то $\sqrt{x^2 + y^2} = 2a$. Тогда первое уравнение примет вид $y \cdot 2a - 2ay - 3 = 0$. Легко видеть, что оно решений не имеет ни при каком $a \in \mathrm{R}$. Следовательно, $x = 0$. Теперь достаточно решить уравнение $y\sqrt{y^2} - 2ay - 3 = 0$, которое легко сводится к равносильному $y|y| - 2ay - 3 = 0$.

1) Пусть $y > 0$: $y^2 - 2ay - 3 = 0$, $D_1 = a^2 + 3$. И тогда $y_1 = a + \sqrt{a^2 + 3}$, $y_2 = a - \sqrt{a^2 + 3}$. Легко видеть, что $y_1 > 0$ при $a \in R$, $y_2 < 0$ при $a \in R$. Итак, мы нашли одно решение

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = a + \sqrt{a^2 + 3} \end{cases} \text{ при } a \in R.$$

2) Если $y < 0$, то получим уравнение второй степени $y^2 + 2ay + 3 = 0$, $D_1 = a^2 - 3$. Тогда, если $a^2 \geqslant 3$, то $y_3 = -a + \sqrt{a^2 - 3}$, $y_4 = -a - \sqrt{a^2 - 3}$. Неравенство $a^2 \geqslant 3$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} a \geqslant \sqrt{3}, \\ a \leqslant -\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Если $a \geqslant \sqrt{3}$, то $y_3 < 0$, $y_4 < 0$. Если же $a \leqslant -\sqrt{3}$, то $y_3 > 0$, $y_4 > 0$. Убедитесь в этом самостоятельно.

Ответ: 1) Если $a < \sqrt{3}$, то $\begin{cases} x = 0, \\ y = a + \sqrt{a^2 + 3}. \end{cases}$

2) Если $a \geqslant \sqrt{3}$, то система имеет решения:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = a + \sqrt{a^2 + 3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = -a - \sqrt{a^2 - 3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = -a + \sqrt{a^2 - 3}. \end{cases}$$

№ 18. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 2ax + a^2} = ax$.

Решение.

ООУ: $(x - a)^2 \geqslant 0$, $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

$\sqrt{(x - a)^2} = ax$, $|x - a| = ax$.

Раскроем модуль:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant a, \\ x - a = ax, \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ a - x = ax; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant a, \\ x(1 - a) = a, \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x < a, \\ x(1 + a) = a. \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Решаем каждую из систем, затем отметим результаты на осях параметра (рис. 175).

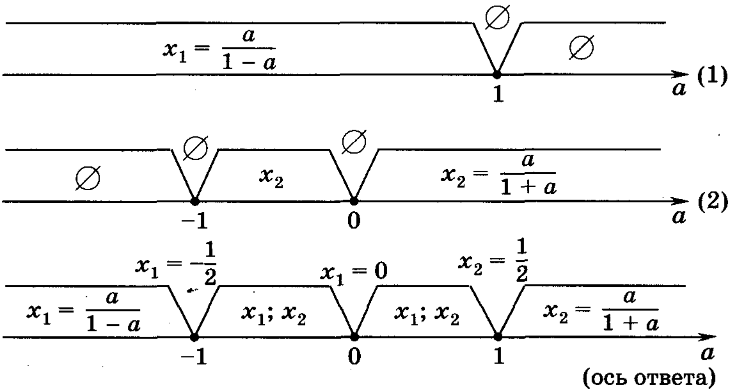


Рис. 175

Решаем систему (1): 1) $a = 1$: решений нет.

2) $a \neq 1$: $x_1 = a/(1-a)$,

$$\begin{cases} x_1 = a/(1-a), \\ a/(1-a) \geqslant a, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = a/(1-a), \\ a^2/(1-a) \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = a/(1-a), \\ a < 1. \end{cases}$$

Теперь решаем систему (2): 1) $a = -1$: решений нет.

2) $a \neq -1$: $x_2 = a/(a+1)$,

$$\begin{cases} x_2 = a/(1+a), \\ a/(a+1) < a, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = a/(a+1), \\ -a^2/(a+1) < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = a/(a+1), \\ a \in (-1; 0) \cup (0; +\infty). \end{cases}$$

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \in (-\infty; -1) \cup \{0\}$, то $x_1 = a/(1-a)$.

2) Если $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$, то $x_1 = a/(1-a)$, $x_2 = a/(1+a)$.

3) Если $a \in [1; +\infty)$, то $x_2 = a/(1+a)$.

№ 19. Решите уравнение $\sqrt{2x-a}-\sqrt{x-2}=1.$

Решение.

Пусть $\sqrt{x-2}=t$, где $t \geqslant 0$. Тогда $x=t^2+2$. Переходим к системе

$$\begin{cases}\sqrt{2t^2+4-a}=t+1,\\ t\geqslant 0,\end{cases}\qquad \begin{cases}2t^2+4-a=t^2+2t+1,\\ t\geqslant 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}t^2-2t+3-a=0,\\ t\geqslant 0.\end{cases}$$

Решаем сначала уравнение второй степени.

$D_1=1-3+a=a-2.$

1) $a<2$: решений нет.

2) $a=2$: $t^2-2t+1=0$, $t=1$, $x_{1,2}=3$.

3) $a>2$: $t_1=1+\sqrt{a-2}$; $t_2=1-\sqrt{a-2}$.

Видим, что $t_1>0$ при $a>2$. Найдем x_1:

$x_1=(1+\sqrt{a-2})^2+2$, $x_1=1+a+2\sqrt{a-2}$.

Узнаем, при каких значениях a $(a>2)$ $t_2\geqslant 0$:

$$\begin{cases}1-\sqrt{a-2}\geqslant 0,\\ a>2,\end{cases}\qquad \begin{cases}a-2\leqslant 1,\\ a>2,\end{cases}\qquad 2<a\leqslant 3,$$

$x_2=(1-\sqrt{a-2})^2+2$, $x_2=1+a-2\sqrt{a-2}$.

Заполним ось ответа (рис. 176).

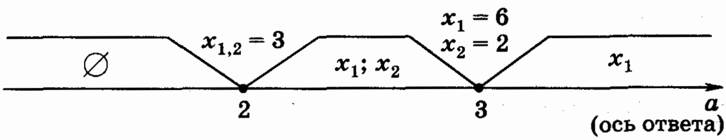


Рис. 176

Ответ: 1) Если $2\leqslant a\leqslant 3$, то $x=1+a-2\sqrt{a-2}$ или $x=1+a+2\sqrt{a-2}$.

2) Если $a>3$, то $x=1+a+2\sqrt{a-2}$.

3) Если $a<2$, то решений нет.

Упражнения для самостоятельного решения

1) Решите уравнения (1—5).

а) $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=x$.

б) $\sqrt{3x+5}-\sqrt{x-2}=a$.

в) $\sqrt{x-\sqrt{x-a}}=a$.

г) $\sqrt{x+a}-\sqrt{\dfrac{a^2}{x+a}}=\sqrt{x+2a}$.

д) $\sqrt{2x+a}-\sqrt{x-1}=2$.

2) Определите число корней уравнения $\sqrt{3x-5}=b-\sqrt{3x+11}$.

3) Для каждого значения параметра a определите число решений уравнения $\sqrt{2|x|-x^2}=a$.

4) Прямая $y=5-x$ является касательной к графику функции $y=x-\sqrt{x^2-2x+a}$. Найдите координаты точки касания.

5) Найдите все значения a, при которых число $x=2$ является корнем уравнения

$$\left(a-3x^2-\sin\frac{11\pi}{4}x\right)\sqrt{11-3ax}=0.$$

6) Решите уравнение $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-3}=1$.

7) Решите уравнение $\sqrt{x^2-b}+2\sqrt{x^2-1}=x$.

8) Решите уравнение $\sqrt{4-x^2}=x-a$.

3. Иррациональные неравенства с параметром

3.1. Подготовительные упражнения

Решите неравенства (1—17).

№ 1. $\sqrt{x}<-a^2-1$.

Ответ: решений нет ни при каком $a\in\mathbb{R}$.

№ 2. $\sqrt{-x^2+x-6} < x+a$.

Решение.

Учитывая, что неравенство $-x^2+x-6 \geqslant 0$ не имеет действительных решений, делаем вывод, что данное неравенство ни при каком $a \in \mathrm{R}$ решений не имеет.

№ 3. $\sqrt{-|x|-|b|} < 5$.

Ответ: 1) Если $b=0$, то $x=0$.
2) Если $b \neq 0$, то решений нет.

№ 4. $(a-1)\sqrt{x} \geqslant 0$.

Ответ: 1) Если $a \geqslant 1$, то $x \geqslant 0$.
2) Если $a < 1$, то $x = 0$.

№ 5. $a\sqrt{x-1} < 0$.

Ответ: 1) Если $a < 0$, то $x > 1$.
2) Если $a \geqslant 0$, то решений нет.

№ 6. $(x-2)\sqrt{a+1} > 0$.

Ответ: 1) Если $a > -1$, то $x > 2$.
2) Если $a \leqslant -1$, то решений нет.

№ 7. $(x-b)\sqrt{x} < 0$.

Решение.

1) Если $b=0$, то решений нет.

2) Если $b > 0$, то $0 < x < b$.

3) Если $b < 0$, то решений нет.

Заполним ось ответа (рис. 177).

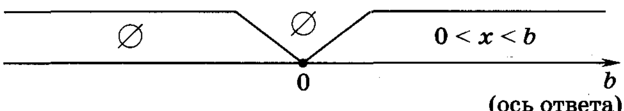


Рис. 177

Ответ: 1) Если $b > 0$, то $0 < x < b$.
2) Если $b \leqslant 0$, то решений нет.

№ 8. $(x-b)\sqrt{x-1} \geqslant 0.$

Решение.

1) Если $b=1$, то $x \geqslant 1.$

2) Если $b>1$, то $x \geqslant b.$

3) Если $b<1$, то $x \geqslant 1.$

Заполним ось ответа (рис. 178).

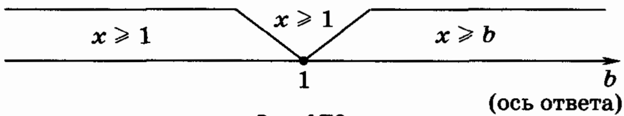


Рис. 178

Ответ: 1) Если $b \leqslant 1$, то $x \geqslant 1.$
2) Если $b>1$, то $x \geqslant b.$

№ 9. $(x-c)^2\sqrt{-x} \geqslant 0.$

Ответ: $x \leqslant 0$ при любом значении $c \in \mathrm{R}.$

№ 10. $\sqrt{\sin x} \leqslant -(a-2)^2.$

Ответ: 1) Если $a \neq 2$, то решений нет.
2) Если $a=2$, то $x=\pi k$, $k \in \mathrm{Z}.$

№ 11. $(3-x)\sqrt{x-b} \leqslant 0.$

Ответ: 1) Если $b \leqslant 3$, то $x \geqslant 3.$
2) Если $b>3$, то $x \geqslant b.$

№ 12. $(x-a)\sqrt{x-2} \geqslant 0.$

Ответ: 1) Если $a>2$, то $x \geqslant a.$
2) Если $a \leqslant 2$, то $x \geqslant 2.$

№ 13. $\sqrt{(a-1)x} > 3.$

Решение.

Данное неравенство равносильно в своей области определения неравенству $(a-1)x>9.$

1) Если $a>1$, то $x>9/(a-1).$

2) Если $a<1$, то $x<9/(a-1).$

3) Если $a=1$, то решений нет.

№ 14. $\sqrt{x^2 - 2x + a} \geqslant 1.$

Решение.

Перейдем к равносильному неравенству

$x^2 - 2x + a - 1 \geqslant 0.$

1) Если $D_1 \leqslant 0$, т. е. $2 - a \leqslant 0$, $a \geqslant 2$, то $x \in R$.

2) Если $D_1 > 0$, т. е. $a < 2$, то

$x \in (-\infty; 1 - \sqrt{2-a}\,] \cup [1 + \sqrt{2-a}; +\infty).$

Ответ запишите сами.

№ 15. $\sqrt{\sin x} < a^2.$

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in R, \\ \sin x \geqslant 0. \end{cases}$

Переходим к равносильной в области определения неравенства системе $\begin{cases} \sin x \geqslant 0, \\ \sin x < a^4. \end{cases}$

Рассмотрим ряд случаев.

1) $a = 0$: решений нет.

2) $|a| = 1$: $\begin{cases} \sin x \geqslant 0, \\ \sin x < 1. \end{cases}$

$x \in [2\pi k; \pi/2 + 2\pi k) \cup (\pi/2 + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $k \in Z$, $n \in Z$ (рис. 179). Обозначим это решение буквой A.

3) $|a| > 1$: $\sin x \geqslant 0$, $x_2 \in [2\pi m; \pi + 2\pi m]$, $m \in Z$. (B)

4) $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$:

$x \in [2\pi l; \arcsin a^4 + 2\pi l) \cup (\pi - \arcsin a^4 + 2\pi t; \pi + 2\pi t]$, $l \in Z$, $t \in Z$ (рис. 180). (C)

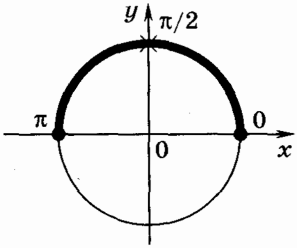


Рис. 179

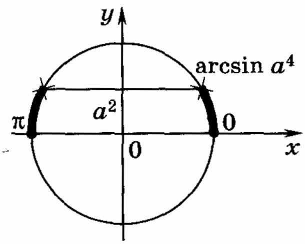


Рис. 180

Заносим результаты на ось параметра (рис. 181).

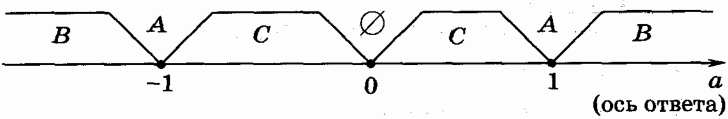


Рис. 181

<u>Ответ</u>: 1) Если $|a| > 1$, то $x \in [2\pi m; \pi + 2\pi m]$, $m \in \mathbb{Z}$.
2) Если $|a| = 1$, то $x \in [2\pi k; \pi/2 + 2\pi k) \cup$
$\cup\ (\pi/2 + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.
3) Если $0 < |a| < 1$, то $x \in [2\pi l; \arcsin a^4 +$
$+ 2\pi l) \cup (\pi - \arcsin a^4 + 2\pi t; \pi + 2\pi t]$,
$l \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{Z}$.
4) Если $a = 0$, то решений нет.

№ 16. $\sqrt{a + 1/x} > -2$.

<u>Решение</u>.

Достаточно решить неравенство $a + 1/x \geqslant 0$: $(ax + 1)/x \geqslant 0$. Рассмотрим следующие случаи.

1) $a = 0$: $1/x \geqslant 0$, $x > 0$.

2) $a > 0$: $\dfrac{x + 1/a}{x} \geqslant 0$. Решаем методом интервалов: $x \in (-\infty; -1/a] \cup (0; +\infty)$ (рис. 182). (A)

3) $a < 0$: $\dfrac{x + 1/a}{x} \leqslant 0$,
$x \in (0; -1/a]$ (рис. 183). (B)

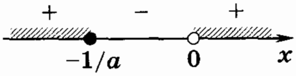


Рис. 182

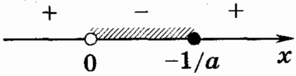


Рис. 183

Заполним ось параметра (рис. 184).

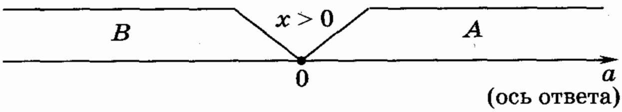


Рис. 184

Ответ: 1) Если $a = 0$, то $x \in (0; +\infty)$.
2) Если $a > 0$, то $x \in (-\infty; -1/a] \cup (0; +\infty)$.
3) Если $a < 0$, то $x \in (0; -1/a]$.

№ 17. $\sqrt{x-a} < \sqrt{a}$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ x \geqslant a. \end{cases}$

Заметим, что при $a \leqslant 0$ неравенство решений не имеет. Остается решить систему

$\begin{cases} a > 0, \\ 0 \leqslant x - a < a, \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ a \leqslant x < 2a \end{cases}$ (рис. 185).

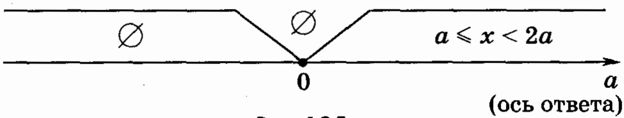


Рис. 185

Ответ: 1) Если $a > 0$, то $a \leqslant x < 2a$.
2) Если $a \leqslant 0$, то решений нет.

3.2. Простейшие иррациональные неравенства с параметром

№ 1. Решите неравенство $\sqrt{x-1} \leqslant a$.

Решение.

1) Если $a < 0$, то решений нет.

2) Если $a = 0$, то $x = 1$.

3) Пусть $a > 0$. Тогда переходим к системе, равносильной данному неравенству в области его определения:

$\begin{cases} x - 1 \leqslant a^2, \\ a > 0, \\ x - 1 \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ 1 \leqslant x \leqslant 1 + a^2 \end{cases}$ (рис. 186).

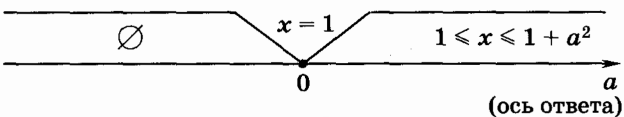


Рис. 186

Ответ: 1) Если $a > 0$, то $x \in [1;\ 1 + a^2]$.
2) Если $a = 0$, то $x = 1$.
3) Если $a < 0$, то решений нет.

№ 2. Решите неравенство $a\sqrt{x+1} < 1$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant -1. \end{cases}$

1) Пусть $a \leqslant 0$: $x \geqslant -1$.

2) Если $a > 0$, то данное неравенство в своей области определения равносильно системе

$$\begin{cases} a^2x + a^2 < 1, \\ a > 0, \\ x \geqslant -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < (1 - a^2)/a^2, \\ a > 0, \\ x \geqslant -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 + 1/a^2, \\ a > 0, \\ x \geqslant -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \leqslant x < -1 + 1/a^2, \\ a > 0. \end{cases}$$

Ответ легко списать с оси параметра a (рис. 187).

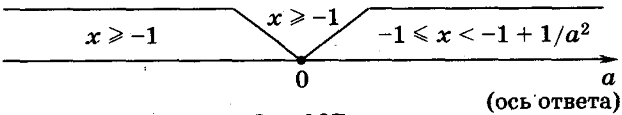


Рис. 187

№ 3. Решите неравенство $(a + 1)\sqrt{2 - x} < 1$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \leqslant 2. \end{cases}$

1) $a \leqslant -1$: $x \leqslant 2$.

2) $a > -1$: $\begin{cases} 2(a+1)^2 - x(a+1)^2 < 1, \\ a > -1, \\ x \leqslant 2, \end{cases}$

$$\begin{cases} x > 2 - 1/(a+1)^2, \\ a > -1, \\ x \leqslant 2. \end{cases}$$

Ответ запишите самостоятельно (рис. 188).

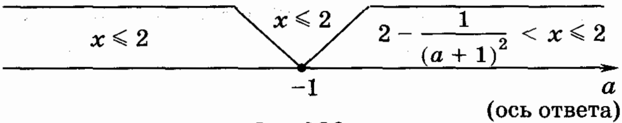


Рис. 188

№ 4. Решите неравенство $\sqrt{2|x| - x^2} \leqslant a$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ 2|x| - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$

1) Если $a < 0$, то решений нет.

2) Пусть $a = 0$: $\sqrt{2|x| - x^2} \leqslant 0$, $2|x| - |x|^2 = 0$,

$\left[\begin{array}{l} |x| = 0, \\ |x| = 2, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2, \\ x = -2. \end{array}\right.$

3) Если $a > 0$, то переходим к системе

$\begin{cases} 2|x| - |x|^2 \leqslant a^2, \\ 2|x| - |x|^2 \geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} |x|^2 - 2|x| + a^2 \geqslant 0, \\ |x|(2 - |x|) \geqslant 0, \end{cases}$

$\begin{cases} |x|^2 - 2|x| + a^2 \geqslant 0, \\ -2 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

Решаем сначала первое неравенство системы при $a > 0$, а затем учитываем, что $x \in [-2; 2]$.

$D_1 \leqslant 0$, т. е. $1 - a^2 \leqslant 0$; $a \geqslant 1$. В этом случае $x \in \mathrm{R}$. А множество решений системы есть отрезок $[-2; 2]$.

$D_1 > 0$: $0 < a < 1$. Тогда

$\left[\begin{array}{l} |x| \geqslant 1 + \sqrt{1 - a^2}, \\ |x| \leqslant 1 - \sqrt{1 - a^2} \end{array}\right.$ (рис. 189).

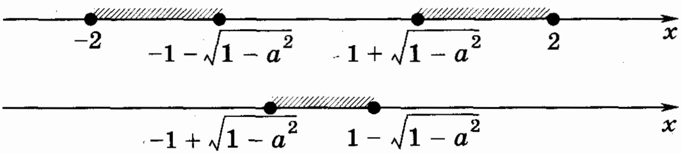


Рис. 189

Заметим, что $1 < 1 + \sqrt{1 - a^2} < 2$; $0 < 1 - \sqrt{1 - a^2} < 1$. Поэтому множеством решений системы будет

$[-2; -1 - \sqrt{1 - a^2}\,] \cup [-1 + \sqrt{1 - a^2}\,; 1 - \sqrt{1 - a^2}\,] \cup$
$\cup [1 + \sqrt{1 - a^2}\,; 2]$. (*)

Ответ запишите самостоятельно по рисунку 190.

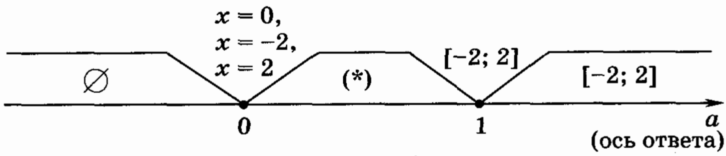


Рис. 190

№ 5. Решите неравенство $\sqrt{a^2 - x^2} \geqslant a + 1$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ |x| \leqslant |a|. \end{cases}$

1) Пусть $a < -1$. Тогда данное неравенство верно при всех $x \in [a; -a]$.

2) При $a \geqslant -1$ перейдем к системе

$\begin{cases} a^2 - x^2 \geqslant (a + 1)^2, \\ a + 1 \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 \leqslant -(2a + 1), \\ a \geqslant -1. \end{cases}$

Легко видеть, что если $2a + 1 > 0$, т. е. $a > -1/2$, то последняя система и данное неравенство решений не имеют.

Если $-1 \leqslant a \leqslant -1/2$, то $|x| \leqslant \sqrt{-(2a + 1)}$;

$-\sqrt{-(2a + 1)} \leqslant x \leqslant \sqrt{-(2a + 1)}$.

<u>Ответ</u>: 1) Если $a < -1$, то $x \in [a; -a]$.
2) Если $-1 \leqslant a \leqslant -1/2$,
то $x \in [-\sqrt{-2a - 1}\,; \sqrt{-2a - 1}\,]$.
3) Если $a > -1/2$, то решений нет.

№ 6. Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}} < a$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \in (-\infty; -1] \cup (1; +\infty). \end{cases}$

1) Если $a \leqslant 0$, то решений нет.

2) Пусть $a > 0$. Перейдем к системе, равносильной в ООН данному неравенству:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} < a^2, \\ a > 0, \\ x \in (-\infty; -1] \cup (1; +\infty); \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{(1-a^2)x + 1 + a^2}{x-1} < 0, \\ a > 0, \\ x \in (-\infty; -1] \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

а) $a = 1$:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-1} < 0, \\ x \in (-\infty; -1] \cup (1; +\infty), \end{cases} \quad x \in (-\infty; -1]$$

б) $\begin{cases} 1 - a^2 > 0, \\ a > 0, \end{cases}$ $a \in (0; 1)$: $\begin{cases} \dfrac{x + \dfrac{1+a^2}{1-a^2}}{x-1} < 0, \\ x \in (-\infty; -1] \cup (1; +\infty), \\ a \in (0; 1). \end{cases}$

Заметим, что если $a \in (0; 1)$, то $\dfrac{1+a^2}{a^2-1} < -1$:

$x \in \left(\dfrac{1+a^2}{a^2-1}; -1\right]$ (рис. 191). (A)

в) $\begin{cases} 1 - a^2 < 0, \\ a > 0, \end{cases}$ $a > 1$: $\begin{cases} \dfrac{x + \dfrac{1+a^2}{1-a^2}}{x-1} < 0, \\ a > 1, \\ x \in (-\infty; -1] \cup (1; +\infty). \end{cases}$

При всех $a > 1$ верно неравенство $\dfrac{1+a^2}{a^2-1} > 1$.

$x \in (-\infty; -1] \cup \left(\dfrac{1+a^2}{a^2-1}; +\infty\right)$ (рис. 192). (B)

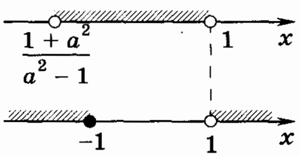


Рис. 191

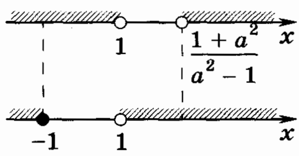


Рис. 192

Заполняем ось параметра (рис. 193).

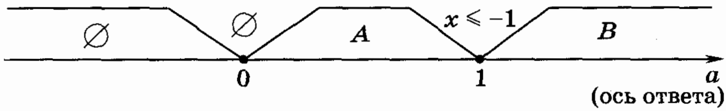


Рис. 193

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \in (0; 1)$, то $x \in \left(\dfrac{1+a^2}{a^2-1}; -1\right]$.

2) Если $a = 1$, то $x \leqslant -1$.

3) Если $a > 1$, то $x \in (-\infty; -1] \cup$

$\cup \left(\dfrac{1+a^2}{a^2-1}; +\infty\right)$.

4) Если $a \leqslant 0$, то решений нет.

№ 7. При каком значении $a > 0$ решения неравенства $\sqrt{x+a} \geqslant 2x$ образуют на числовой прямой отрезок длиной $2a$?

<u>Решение</u>.

Построим графики функций $y = \sqrt{x+a}$ (1) и $y = 2x$ (2) (рис. 194). График функции (1) расположен не ниже графика функции (2), если $x \in [-a; x_0]$, где x_0 — положительный корень уравнения $\sqrt{x+a} = 2x$. Оно равносильно уравнению $x + a = 4x^2$ при $x > 0$. Учитывая, что $x_0 + a = 2a$, находим x_0: $x_0 = a$.

Подставим вместо x параметр a в уравнение $4x^2 - x - a = 0$; $4a^2 - a - a = 0$,

$$\left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 1/2. \end{array}\right.$$

<u>Ответ</u>: 1/2.

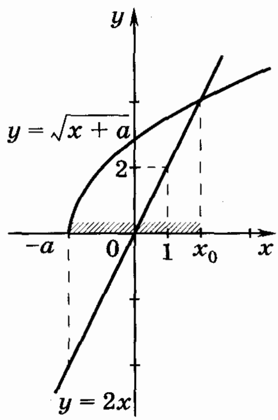


Рис. 194

№ 8. Решите неравенство $\sqrt{ax+1} > \sqrt{x+a}$.

Решение.

Переходим к системе $\begin{cases} ax+1 > x+a, \\ x+a \geqslant 0, \end{cases}$ равносильной данному неравенству в области его определения.

$\begin{cases} x(a-1) > a-1, \\ x \geqslant -a. \end{cases}$

1) Пусть $a = 1$: $x \cdot 0 > 0$. Решений нет.

2) При $a > 1$ решим систему $\begin{cases} x > 1, \\ x \geqslant -a, \end{cases}$ откуда $x > 1$.

3) Если $a < 1$, то получим систему $\begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant -a. \end{cases}$

Пусть $-1 < a < 1$: $-a \leqslant x < 1$.
Если $a \leqslant -1$, то решений нет.
Заполним ось ответа (рис. 195).

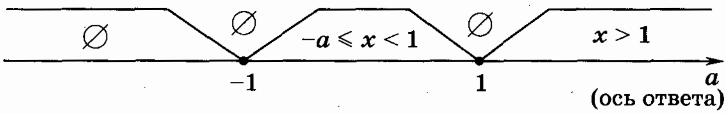


Рис. 195

Ответ: 1) Если $a > 1$, то $x > 1$.
2) Если $-1 < a < 1$, то $-a \leqslant x < 1$.
3) В остальных случаях решений нет.

№ 9. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - a} < 3x$.

Решение.

Составим и решим систему

$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - a \geqslant 0, \\ x^2 - a < 9x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x^2 \geqslant a, \\ x^2 > -a/8. \end{cases}$

1) Пусть $a = 0$: $x > 0$.

2) Пусть $a > 0$: $\begin{cases} x > 0, \\ x^2 \geqslant a, \end{cases}$ $x \geqslant \sqrt{a}$.

3) Если $a < 0$, то $\begin{cases} x > 0, \\ x^2 > -a/8, \end{cases}$ $x > \sqrt{-2a}\,/4$.

Ответ: 1) Если $a > 0$, то $x \geqslant \sqrt{a}$.

2) Если $a \leqslant 0$, то $x > \sqrt{-2a}\,/4$.

№ 10. Решите неравенство $\sqrt{a^2 - x^2} > -2x$.

Решение.

Решим совокупность систем $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0,\\ a^2 - x^2 \geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x \leqslant 0,\\ a^2 - x^2 > 4x^2,\end{cases}\end{array}\right.$ равносильную данному неравенству в его области определения.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0,\\ x \leqslant |a|,\end{cases}\\ \begin{cases}x \leqslant 0,\\ -\sqrt{5}\cdot x < |a|,\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0,\\ x \leqslant |a|,\end{cases}\\ \begin{cases}x \leqslant 0,\\ x > -|a|/\sqrt{5}.\end{cases}\end{array}\right.$$

1) Если $a = 0$, то решений нет.

2) Пусть $a \neq 0$:

$$\left[\begin{array}{l}0 < x \leqslant |a|,\\ -|a|/\sqrt{5} < x \leqslant 0,\end{array}\right. \quad -|a|/\sqrt{5} < x \leqslant |a|.$$

Ответ: 1) Если $a \neq 0$, то $-|a|/\sqrt{5} < x \leqslant |a|$.

2) Если $a = 0$, то решений нет.

№ 11. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - a^2} < |x|$.

Решение.

Переходим к системе:

$$\begin{cases}x^2 - a^2 \geqslant 0,\\ |x| > 0,\\ x^2 - a^2 < x^2,\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2 - a^2 \geqslant 0,\\ x \neq 0,\\ x^2 - a^2 < x^2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2 \geqslant a^2,\\ x \neq 0,\\ a \neq 0,\end{cases} \qquad \begin{cases}|x| \geqslant |a|,\\ a \neq 0.\end{cases}$$

Ответ: 1) Если $a \neq 0$, то $|x| \geqslant |a|$.

2) Если $a = 0$, то решений нет.

№ 12. Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}} \leqslant \sqrt{\dfrac{a-x}{x^2+1}}$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant 0, \\ x \leqslant a. \end{cases}$

Проанализируем область определения неравенства.

1) Если $a < 0$, то ни одна пара значений x и a не входит в ООН. А потому при $a < 0$ решений нет.

2) Если $a = 0$, то $x = 0$.

3) Пусть теперь $a > 0$. Тогда $x \in [0; a]$. Перейдем от данного неравенства к системе

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a, \\ a > 0, \\ \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{a-x}{x^2+1}, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a, \\ a > 0, \\ x \leqslant a - x, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a/2, \\ a > 0. \end{cases}$$

Ответ: 1) Если $a > 0$, то $x \in [0; a/2]$.
2) Если $a = 0$, то $x = 0$.
3) Если $a < 0$, то решений нет.

№ 13. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - ax + 1} > \sqrt{x+1}$.

Решение.

Достаточно решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - ax + 1 > x + 1, \\ x \geqslant -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - (a+1)x > 0, \\ x \geqslant -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x - a - 1) > 0, \\ x \geqslant -1. \end{cases}$$

Первое неравенство системы будем решать методом интервалов. Найдем сначала нули функции $y = x(x - a - 1)$:

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = a + 1. \end{array} \right.$$

Сравним $a + 1$ с числами 0 и -1:

$a + 1 = 0$, $a = -1$; $a + 1 = -1$, $a = -2$.

Рассмотрим пять случаев (рис. 196).

1) $a = -1$: $\begin{cases} x^2 > 0, \\ x \geqslant -1, \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \geqslant -1. \end{cases}$

$x \in [-1; 0) \cup (0; +\infty)$ (рис. 197).

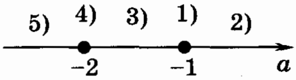


Рис. 196

Рис. 197

2) $a > -1$: $x \in [-1; 0) \cup (a + 1; +\infty)$ (рис. 198).

3) $-2 < a < -1$: $x \in [-1; a + 1) \cup (0; +\infty)$ (рис. 199).

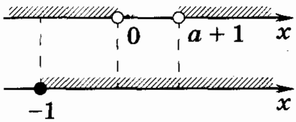


Рис. 198

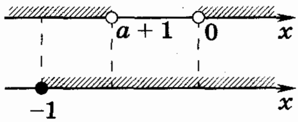


Рис. 199

4) $a = -2$: $x \in (0; +\infty)$ (рис. 200).

5) $a < -2$: $x \in (0; +\infty)$ (рис. 201).

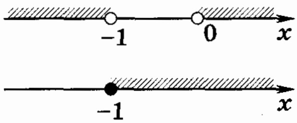


Рис. 200

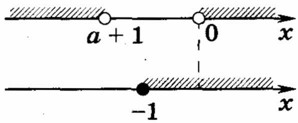


Рис. 201

Ответ запишите самостоятельно.

№ 14. Решите неравенство $\sqrt{4x^2 - a^2} > x$.

Решение.

Данное неравенство в своей области определения равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ 4x^2 - a^2 \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 0, \\ 4x^2 - a^2 > x^2, \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x < 0, \\ (x - a/2)(x + a/2) \geqslant 0, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x \geqslant 0, \\ (x - a\sqrt{3}/3)(x + a\sqrt{3}/3) > 0. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решаем каждую из систем, отмечаем результаты на осях параметра, а затем сводим их на оси ответа.

Решаем систему (1): 1) $a = 0$: $x < 0$.

2) $a > 0$: $x \leqslant -a/2$ (рис. 202).

3) $a < 0$: $x \leqslant a/2$ (рис. 203).

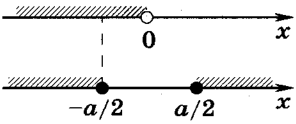


Рис. 202

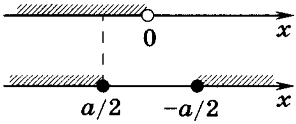


Рис. 203

Результаты — на оси (1) рис. 206.

Решаем систему (2): 1) $a = 0$: $x > 0$.

2) $a > 0$: $x > a\sqrt{3}/3$ (рис. 204).

3) $a < 0$: $x > -a\sqrt{3}/3$ (рис. 205).

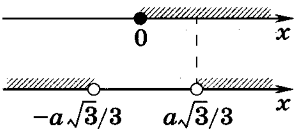


Рис. 204

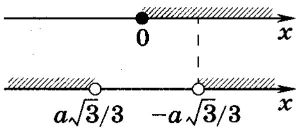


Рис. 205

Результаты — на оси (2) рис. 206.

Теперь сводим все вместе (рис. 206, ось ответа).

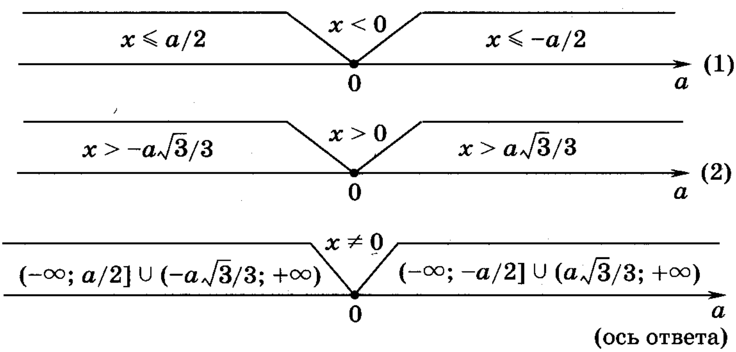


Рис. 206

Ответ: 1) Если $a > 0$, то $x \in (-\infty; -a/2] \cup$
$\cup (a\sqrt{3}/3; +\infty)$.
2) Если $a < 0$, то $x \in (-\infty; a/2] \cup$
$\cup (-a\sqrt{3}/3; +\infty)$.
3) Если $a = 0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3.3. Более сложные иррациональные неравенства и системы с параметром

№ 1. Решите неравенство $\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} > a$.

Решение.

$a \in \mathrm{R}$,

ООН: $\begin{cases} a + x \geqslant 0, \\ a - x \geqslant 0. \end{cases}$

1) $a < 0$. Рассмотрим в этом случае ООН (рис. 207):

$\begin{cases} x \geqslant -a, \\ x \leqslant a. \end{cases}$

Легко видеть, что решений нет, так как ни одна пара значений x и a не является допустимой.

2) $a = 0$: $\sqrt{x} + \sqrt{-x} > 0$. В этом случае тоже решений нет.

3) $a > 0$. ООН (рис. 208): $x \in [-a, a]$. Возведем обе части данного неравенства в квадрат. Получим неравенство $2\sqrt{a^2 - x^2} > a(a - 2)$, равносильное данному неравенству в области его определения (при $a > 0$):

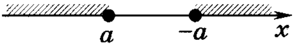


Рис. 207

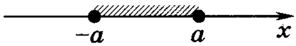


Рис. 208

а) $a > 2$: $4(a^2 - x^2) > a^2(a^2 - 4a + 4)$,
$x^2 < a^3(1 - a/4)$.

$a \in (2; 4)$: $x \in \left(-\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}; \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}\right)$, (*)

$a \in [4; +\infty)$. Решений нет.

б) $a \in (0; 2)$: $x \in [-a; a]$.

в) $a = 2$, тогда $2\sqrt{4 - x^2} > 0$; $4 - x^2 > 0$, $x \in (-2; 2)$. Заполняем ось ответа (рис. 209).

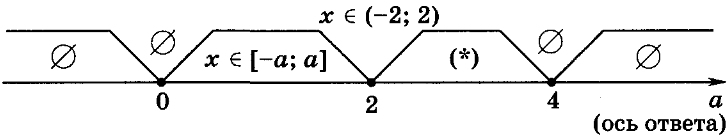


Рис. 209

Ответ: 1) Если $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 4$, то решений нет.
2) Если $a = 2$, то $x \in (-2; 2)$.
3) Если $a \in (0; 2)$, то $x \in [-a; a]$.
4) Если $a \in (2; 4)$,
то $x \in \left(-\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}; \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}\right)$.

№ 2. Решите неравенство $(\sqrt{x - 1} - a)(\sqrt{x + 1} - 2a) \geqslant 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

Рассмотрим ряд случаев.

1) $a < 0$: $x \geqslant 1$.

2) $a = 0$: $\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 1} \geqslant 0$, $x \geqslant 1$.

3) $a > 0$. Будем решать данное неравенство методом интервалов. Определим «граничные точки»:

$\sqrt{x - 1} = a$, $x = a^2 + 1$.

$\sqrt{x + 1} = 2a$, $x = 4a^2 - 1$.

Теперь выясним, когда «граничные точки» совпадают при условии, что $a > 0$. Для этого решим уравнение $a^2 + 1 = 4a^2 - 1$: $a = \sqrt{6}/3$. Возможны случаи:

а) $a = \sqrt{6}/3$:

$(\sqrt{x - 1} - \sqrt{6}/3)(\sqrt{x + 1} - 2\sqrt{6}/3) \geqslant 0$, $x \geqslant 1$.

б) $a > \sqrt{6}/3$:

$x_1 \in [1; a^2 + 1] \cup [4a^2 - 1; +\infty)$ (рис. 210). (A)

в) $0 < a < \sqrt{6}/3$. В этом случае $4a^2 - 1 < a^2 + 1$. Приравняем $4a^2 - 1$ и число 1:

$4a^2 - 1 = 1$; $a = \sqrt{2}/2$.

Если $0 < a < \sqrt{2}/2$, то $4a^2 - 1 < 1$,

а если $\sqrt{2}/2 < a < \sqrt{6}/3$, то $4a^2 - 1 > 1$.

$a = \sqrt{2}/2$: $x \in \{1\} \cup [3/2; +\infty)$ (рис. 211). (B)

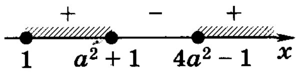


Рис. 210

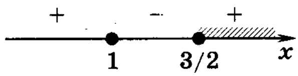


Рис. 211

$0 < a < \sqrt{2}/2$: $x \in [a^2 + 1; +\infty)$ (рис. 212). (C)

$\sqrt{2}/2 < a < \sqrt{6}/3$:

$x \in [1; 4a^2 - 1] \cup [a^2 + 1; +\infty)$ (рис. 213). (D)

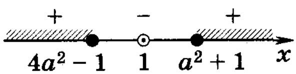


Рис. 212

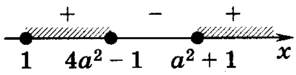


Рис. 213

Заполняем ось ответа (рис. 214).

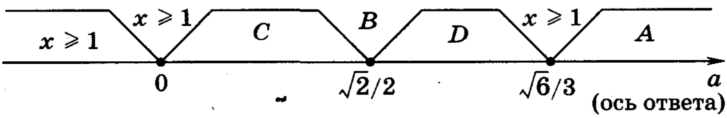


Рис. 214

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \leqslant 0$ или $a = \sqrt{6}/3$, то $x \geqslant 1$.

2) Если $0 < a < \sqrt{2}/2$, то $x \in [a^2 + 1; +\infty)$.

3) Если $a = \sqrt{2}/2$, то $x \in \{1\} \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

4) Если $\sqrt{2}/2 < a < \sqrt{6}/3$,
то $x \in [1; 4a^2 - 1] \cup [a^2 + 1; +\infty)$.

5) Если $a > \sqrt{6}/3$,
то $x \in [1; a^2 + 1] \cup [4a^2 - 1; +\infty)$.

№ 3. При каких значениях a решения неравенства $\sqrt{2x - 4a} \geqslant x$ образуют на числовой прямой отрезок длины $3|a|$?

Решение.

Будем решать это неравенство графически. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $a < 0$. В системе координат (xOy) построим графики функций $y = \sqrt{2x - 4a}$ (1) и $y = x$ (2) (рис. 215).

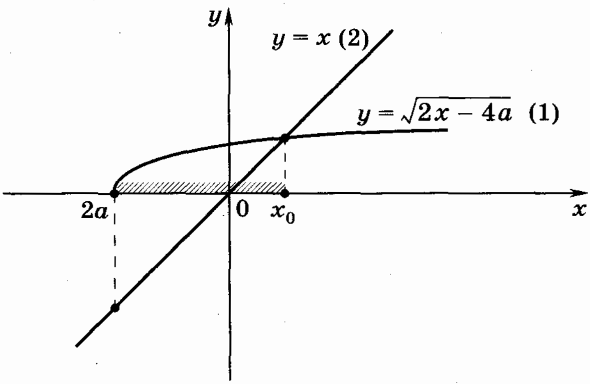


Рис. 215

График функции (1) расположен не ниже графика функции (2), если $x \in [2a; x_0]$, где x_0 — положительный корень уравнения $\sqrt{2x - 4a} = x$. Учитывая, что $\begin{cases} x_0 - 2a = 3|a|, \\ a < 0, \end{cases}$ находим, что $x_0 = -a$.

Подставим $-a$ вместо x в уравнение $2x - 4a = x^2$: $a^2 + 4a + 2a = 0$, $\left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = -6, \end{array}\right.$ $a = -6$.

2) Пусть теперь $a \geqslant 0$.

От уравнения $\sqrt{2x-4a} = x$ переходим к системе $\begin{cases} x^2 - 2x + 4a = 0, \\ x \geqslant 0 \text{ (рис. 216).} \end{cases}$ Если x_1 и x_2 — решения системы, где $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 = 3a$.

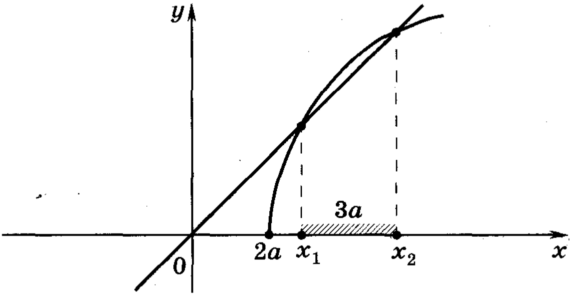


Рис. 216

Используя теорему Виета, перейдем к системе

$$\begin{cases} x_2 + x_1 = 2, \\ x_1x_2 = 4a, \\ x_2 - x_1 = 3a: \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{2-3a}{2}, \\ x_2 = \dfrac{2+3a}{2}, \\ x_1 \cdot x_2 = 4a. \end{cases}$$

Подставим выражения x_1 и x_2 в третье уравнение последней системы:

$$\frac{2-3a}{2} \cdot \frac{2+3a}{2} = 4a, \quad 9a^2 + 16a - 4 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 2/9, \\ a = -2, \end{array}\right. \quad a = 2/9.$$

Ответ: -6; $2/9$.

№ 4. Решите неравенство $\sqrt{2x+a} \geqslant x$.

Решение.

1 способ (аналитический).

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant -a/2. \end{cases}$

1) Если $x < 0$, то решениями неравенства являются все пары $(x; a)$ из области определения неравенства:

$$\begin{cases} x < 0, \\ x \geqslant -a/2. \end{cases}$$

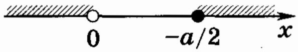


Рис. 217

а) $a < 0$ (рис. 217): в этом случае решений нет.

б) $a = 0$: $\begin{cases} x < 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$ Опять решений нет.

в) $a > 0$: $x \in [-a/2; 0)$.

Результаты нанесем на ось (1) рисунка 218.

2) Если $x \geqslant 0$, то данное неравенство в своей области определения равносильно системе $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 2x + a \geqslant x^2. \end{cases}$

Рассмотрим второе неравенство системы, переписав его в виде $x^2 - 2x - a \leqslant 0$.

$D_1 < 0$, $1 + a < 0$, $a < -1$: неравенство, а значит, и система решений не имеют.

$D_1 = 0$, $a = -1$: $(x-1)^2 \leqslant 0$, $x = 1$. Это единственное решение системы.

$D_1 > 0$, $a > -1$: $x \in [1 - \sqrt{1+a}; 1 + \sqrt{1+a}]$.

Система примет вид

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 1 - \sqrt{1+a} \leqslant x \leqslant 1 + \sqrt{1+a}, \\ a > -1. \end{cases}$$

Ясно, что при всех $a > -1$ верны неравенства $1 - \sqrt{1+a} < 1 + \sqrt{1+a}$, $1 + \sqrt{1+a} > 0$. Приравняем $1 - \sqrt{1+a}$ и 0: $1 - \sqrt{1+a} = 0$, $a = 0$. Рассмотрим три случая.

а) $a \in (-1; 0)$: $1 - \sqrt{1+a} \leqslant x \leqslant 1 + \sqrt{1+a}$. (*)

б) $a = 0$: $x \in [0; 2]$.

в) $a > 0$: $x \in [0; 1 + \sqrt{1+a}]$.

Нанесем результаты на ось (2) рисунка 218 и сведем все на одну ось ответа.

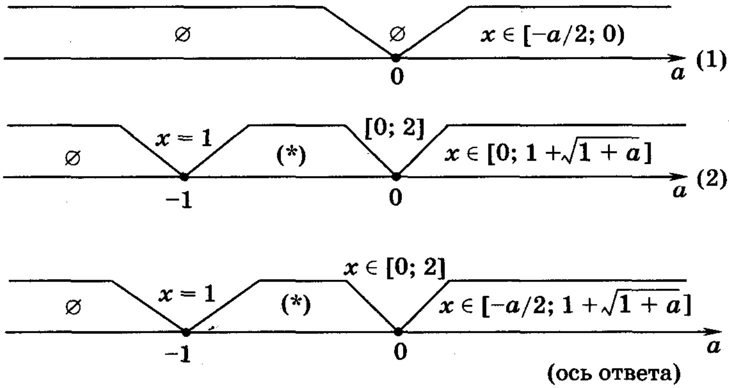


Рис. 218

<u>Ответ</u>: 1) Если $a < -1$, то решений нет.
2) Если $a = -1$, то $x = 1$.
3) Если $a \in (-1; 0]$, то
$x \in [1 - \sqrt{1+a};\ 1 + \sqrt{1+a}\,]$.
4) Если $a > 0$, то $x \in \left[-\frac{a}{2};\ 1 + \sqrt{1+a}\,\right]$.

<u>2 способ</u> (графический).

Данное неравенство в своей области определения равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x < 0, \\ x \geqslant -a/2, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - 2x - a \leqslant 0. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решим эти системы графически в системе координат (xOa).

(1): $\begin{cases} x < 0, \\ a \geqslant -2x \end{cases}$ (рис. 219).

Система имеет решения при $a > 0$. Тогда $x \in [-a/2; 0)$.

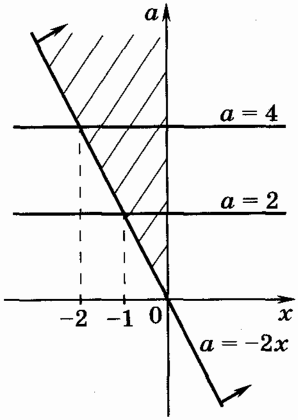


Рис. 219

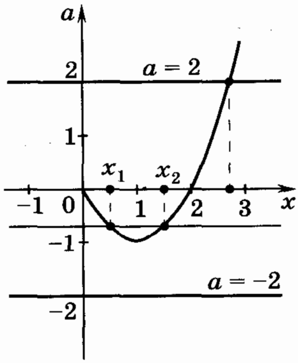


Рис. 220

По рисунку хорошо видно, что если $a = 2$, то $x \in [-1; 0)$, если $a = 4$, то $x \in [-2; 0)$ и т. д.

(2): $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - 2x - a \leqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - 2x \leqslant a. \end{cases}$

Построим в системе координат (xOa) график функции $a = x^2 - 2x$ при $x \geqslant 0$ (рис. 220).

Если $a < -1$, то график функции $a = x^2 - 2x$, где $x \geqslant 0$, расположен над прямой $a = k$, где $k < -1$. Поэтому решений нет.

При $a = -1$ $x = 1$.

Если $-1 < a \leqslant 0$, то $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$:

$1 - \sqrt{1 + a} \leqslant x \leqslant \leqslant 1 + \sqrt{1 + a}$.

Если $a > 0$, то график функции $a = x^2 - 2x$, где $x \geqslant 0$, расположен не выше прямой $a = k$, где $k > 0$, если $x \in [0; 1 + \sqrt{1 + a}]$.

Объединив множества решений систем (1) и (2), получим ответ.

№ 5. При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt{2x - a} \geqslant x$ не имеет решений?

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \geqslant a/2. \end{cases}$

1 способ (аналитический).

Данное неравенство равносильно в своей области определения совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x \geqslant a/2, \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x \geqslant 0, \\ 2x - a \geqslant x^2. \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Рассмотрим отдельно каждую из систем. Легко видеть, что система (1) не имеет решений при $a \geqslant 0$. Решаем систему (2):

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - 2x + a \leqslant 0. \end{cases}$$

1) $D_1 = 1 - a$, $1 - a < 0$, $a > 1$ (рис. 221).

Система (2) решений не имеет.

2) $D_1 = 0$: $a = 1$; $x = 1$. Система совместна. Этот случай нас не устраивает.

3) Если $D_1 > 0$, т. е. $a < 1$, то неравенство $x^2 - 2x - a \leqslant 0$ всегда имеет неотрицательные решения (рис. 222).

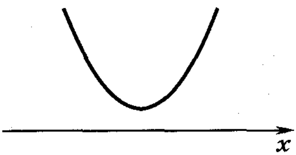


Рис. 221

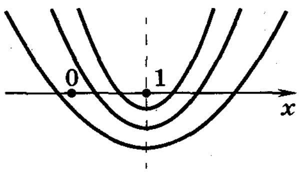


Рис. 222

Ответ: $a > 1$.

2 способ (графический).

Построим графики функций $y = \sqrt{2x - a}$ и $y = x$ в системе координат (xOy) (рис. 223).

Рассмотрим случай, когда прямая $y = x$ является касательной к графику функции $y = \sqrt{2x - a}$.

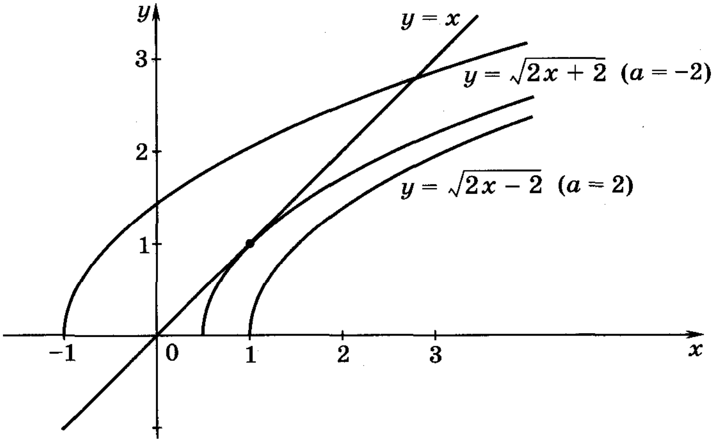


Рис. 223

Пусть при этом $a = a_0$. Тогда данное неравенство не имеет решений, если $a > a_0$ (график функции $y = x$ будет выше графика функции $y = \sqrt{2x - a}$).

Найдем производную $y = \sqrt{2x - a}$; $y' = 1/\sqrt{2x - a}$. Учитывая, что $y'(x_0) = 1$, решим уравнение $y'(x) = 1$: $1/\sqrt{2x - a} = 1$, $x_0 = (a + 1)/2$. Тогда

$$y(x_0) = \sqrt{2 \cdot \frac{a+1}{2} - a} = 1.$$

Уравнение касательной примет вид $y = x - (a + 1)/2 + 1$, откуда $1 - (a + 1)/2 = 0$, т. е. $a = 1$. Итак, неравенство не имеет решений при $a > 1$.

№ 6. При каких значениях параметра a множеством решений неравенства $x\sqrt{x} - a\sqrt{x} \leqslant ax - a^2$ будет отрезок длины меньше единицы?

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

1 способ (аналитический).

Представим данное неравенство в виде

$(\sqrt{x} - a)(x - a) \leqslant 0,$

а затем рассмотрим ряд случаев.

1) Если $a < 0$, то решений нет.

2) Если $a = 0$, то $x = 0$.

3) Пусть $a > 0$.

Обозначим $\sqrt{x} = t$, где $t \geqslant 0$. Получим неравенство $(t - a)(t - \sqrt{a})(t + \sqrt{a}) \leqslant 0$, а затем ему равносильное: $(t - a)(t - \sqrt{a}) \leqslant 0$.

Решаем методом интервалов:

а) $\begin{cases} \sqrt{a} > a, \\ a > 0, \end{cases}$ $0 < a < 1$ (рис. 224);

$a \leqslant t \leqslant \sqrt{a}$, $a \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{a}$, $a^2 \leqslant x \leqslant a$.

Легко видеть, что $0 < a - a^2 < 1$.

б) $\begin{cases} a > \sqrt{a}, \\ a > 0, \end{cases}$ $a > 1$ (рис. 225).

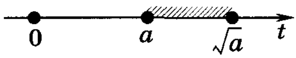


Рис. 224

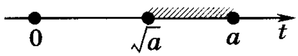


Рис. 225

$\sqrt{a} \leqslant t \leqslant a$, $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{x} \leqslant a$, $a \leqslant x \leqslant a^2$.

Решим систему неравенств $\begin{cases} a^2 - a < 1, \\ a > 1: \end{cases}$

$\begin{cases} a > 1, \\ a^2 - a - 1 < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} < a < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, \end{cases}$

$1 < a < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

в) Если $a = 1$, то получаем неравенство $(t - 1)^2 \leqslant 0$: $t = 1$, $\sqrt{x} = 1$, $x = 1$.

Ответ: $a \in (0; 1) \cup \left(1; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2 способ (графический).

1) Если $a < 0$, то решений нет.

2) Если $a = 0$, то $x = 0$.

3) Решаем неравенство $(\sqrt{x} - a)(x - a) \leqslant 0$, где $a > 0$, в системе координат (xOy), введя функции:
$y = \sqrt{x} - a$ и $y = x - a$.

а) $a = 1$ (рис. 226).

б) $a > 1$ (рис. 227).

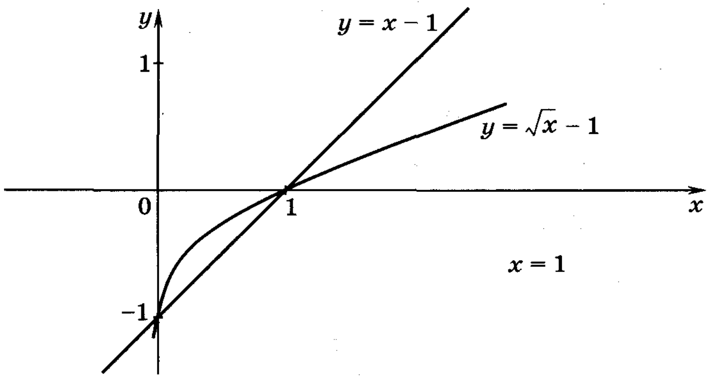


Рис. 226

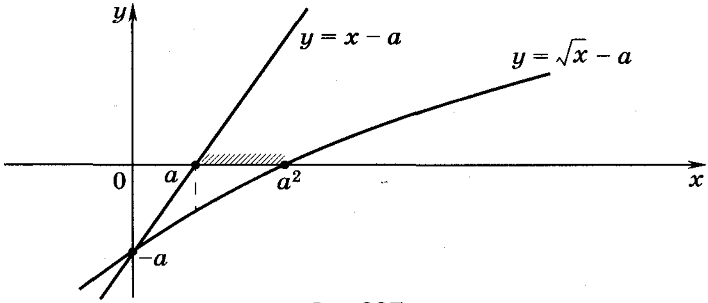


Рис. 227

Тогда $a^2 > a$.

$x \in [a; a^2]$.

А теперь решим систему неравенств

$\begin{cases} a > 1, \\ a^2 - a < 1, \end{cases}$

$\begin{cases} a > 1, \\ a^2 - a - 1 < 0, \end{cases}$

$1 < a < (1 + \sqrt{5})/2$.

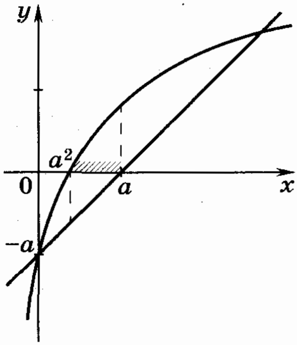


Рис. 228

в) $0 < a < 1$. Тогда $a^2 < a$ (рис. 228).

Узнаем, при каких значениях $0 < a < 1$ верно неравенство $a - a^2 < 1$:

$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ a^2 - a + 1 > 0, \end{cases}$ $0 < a < 1$.

Ответ: $a \in (0; 1) \cup (1; (1 + \sqrt{5})/2)$.

№ 7. Решите неравенство

$$x - \sqrt{x^2 - a^2} < \frac{(x-a)^2}{2(x+a)}.$$

Решение.

ООН: $\begin{cases} x^2 - a^2 \geqslant 0, \\ x \neq -a; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant 0, \\ x \in (-\infty; -a) \cup [a; +\infty); \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ x \in (-\infty; a] \cup (-a; +\infty). \end{cases} \end{array}\right.$

Рассмотрим два случая.

1) $\begin{cases} x - a \geqslant 0, \\ x + a > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant a, \\ x > -a; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant 0, \\ x \geqslant a \end{cases} \text{(рис. 229)}, \\ \begin{cases} a < 0, \\ x > -a \end{cases} \text{(рис. 230)}. \end{array}\right.$

Данное неравенство перепишем в виде

$$2x - 2\sqrt{x^2 - a^2} < \frac{(x-a)^2}{(\sqrt{x+a})^2}.$$

Рис. 229

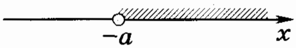


Рис. 230

И далее:

$$(x-a)-2\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x+a}+x+a<\left(\frac{x-a}{\sqrt{x+a}}\right)^2,$$

$$(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a})^2<\left(\frac{x-a}{\sqrt{x+a}}\right)^2,$$

$$|\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}|<\frac{x-a}{\sqrt{x+a}}.$$

а) Пусть $a>0$:

$$\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}<\frac{x-a}{\sqrt{x+a}},\ x+a-\sqrt{x^2-a^2}<x-a,$$

$$\sqrt{x^2-a^2}>2a.$$

Возведем обе части последнего неравенства в квадрат: $x^2-a^2>4a^2$, $|x|>a\sqrt{5}$. Учитывая ООН, получим, что $x>a\sqrt{5}$.

б) Если $a=0$, то $x\neq 0$.

в) Пусть теперь $a<0$:

$$\sqrt{x-a}-\sqrt{x+a}<\frac{x-a}{\sqrt{x+a}},\ \sqrt{x^2-a^2}-x-a<x-a,$$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-a^2}<2x,\\ x>-a,\\ a<0,\end{cases}\qquad \begin{cases}x^2-a^2<4x^2,\\ x>-a,\\ a<0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x^2>-a^2,\\ x>-a,\\ a<0,\end{cases}\qquad \begin{cases}x>-a,\\ a<0.\end{cases}$$

Заполним ось (1) на рис. 233.

$$2)\ \begin{cases}x-a\leqslant 0,\\ x+a<0,\end{cases}\quad \begin{cases}x\leqslant a,\\ x<-a,\end{cases}\quad \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}a\geqslant 0,\\ x<-a\end{cases} & \text{(рис. 231)},\\ \begin{cases}a<0,\\ x\leqslant a\end{cases} & \text{(рис. 232)}.\end{array}\right.$$

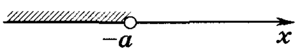


Рис. 231

Рис. 232

Учтем, что $a - x \geqslant 0$, $-a - x > 0$:

$$-(a - x) - (-x - a) - 2\sqrt{a - x}\sqrt{-x - a} < (x - a)^2/(x + a),$$

$$-(\sqrt{a - x} + \sqrt{-x - a}\,)^2 < -(x - a)^2/(\sqrt{-x - a}\,)^2,$$

$$\sqrt{a - x} + \sqrt{-x - a} > (a - x)/\sqrt{-x - a}\,,$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} - x - a > a - x,\ \sqrt{x^2 - a^2} > 2a.$$

а) $a < 0$: $x \leqslant a$.

б) $a = 0$: $|x| > 0$, $x \neq 0$.

в) $a > 0$: $\begin{cases} x^2 - a^2 > 4a^2, \\ x < -a, \\ a > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} -x > a\sqrt{5}\,, \\ x < -a, \\ a > 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x < -a\sqrt{5}\,, \\ x < -a, \\ a > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x < -a\sqrt{5}\,, \\ a > 0. \end{cases}$

Результаты решения отмечаем на оси (2) параметра a, а затем объединяем все на оси ответа (рис. 233).

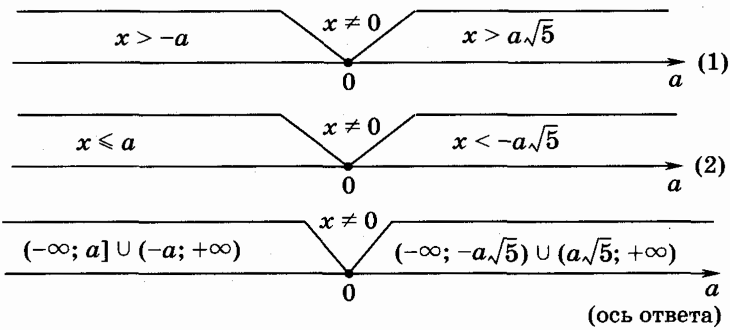


Рис. 233

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \geqslant 0$, то $x \in (-\infty; -a\sqrt{5}\,) \cup$

$\cup\ (a\sqrt{5}\,; +\infty)$.

2) Если $a < 0$, то $x \in (-\infty; a] \cup (-a; +\infty)$.

№ 8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} \leqslant x, \\ ax > a. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ООС: } \begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$$

1) Если $a = 0$, то решений нет.

2) Пусть $a > 0$: $\begin{cases} \sqrt{x+2} \leqslant x, \\ x > 1; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geqslant 0, \\ x > 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2, \\ x \leqslant -1, \end{array} \right. \\ x > 1, \end{cases} \qquad x \geqslant 2.$$

3) $a < 0$: $\begin{cases} \sqrt{x+2} \leqslant x, \\ x < 1, \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geqslant 0, \\ 0 \leqslant x < 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2, \\ x \leqslant -1, \end{array} \right. \\ 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Последняя система решений не имеет. Поэтому в этом случае решений нет (рис. 234).

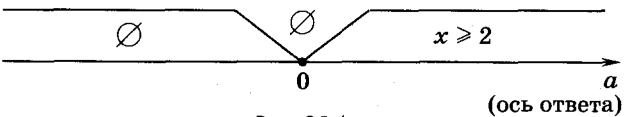


Рис. 234

Ответ: 1) Если $a > 0$, то $x \geqslant 2$.
2) Если $a \leqslant 0$, то решений нет.

№ 9. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x - 1/2} \leqslant -a^2, \\ 2^{\sqrt{x-a}} > 1/4. \end{cases}$$

Решение.

1) Если $a \neq 0$, то первое неравенство системы, а значит, и система решений не имеют.

2) При $a = 0$ система примет вид

$\begin{cases} \sqrt{\sin x - 1/2} \leqslant 0, \\ \sqrt{x} > -2, \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \sin x = 1/2, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x = (-1)^n \pi/6 + \pi n, \ n \in \mathrm{Z}, \\ x \geqslant 0, \end{cases}$

$x = (-1)^n \pi/6 + \pi n, \ n \in \{0\} \cup \mathrm{N}.$

Ответ: 1) Если $a \neq 0$, то решений нет.
2) Если $a = 0$, то $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, $n \in \{0\} \cup \mathrm{N}$.

№ 10. При каких значениях параметра a системе $\begin{cases} 1/4 \leqslant x \leqslant 1, \\ \sqrt{x^2 - 2ax} > 1 - x \end{cases}$ удовлетворяют все значения x из отрезка $[1/4; 1]$?

Решение.

ООС: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x^2 - 2ax \geqslant 0. \end{cases}$

Заметим, что $1 - x \geqslant 0$, учитывая неравенства $1/4 \leqslant x \leqslant 1$. Возведем обе части неравенства системы в квадрат. Получим

$\begin{cases} 1/4 \leqslant x \leqslant 1, \\ x(1 - a) > 1/2. \end{cases}$

1) $a = 1$: решений нет.

2) $a > 1$: $\begin{cases} 1/4 \leqslant x \leqslant 1, \\ x < \dfrac{1}{2(1 - a)} \end{cases}$ (рис. 235).

В этом случае решений нет.

3) Пусть $a < 1$: $\begin{cases} 1/4 \leqslant x \leqslant 1, \\ x > \dfrac{1}{2(1 - a)} \end{cases}$ (рис. 236).

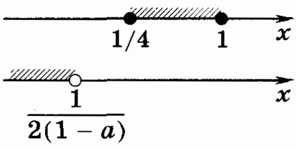


Рис. 235

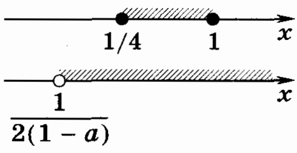


Рис. 236

Системе удовлетворяют все $x \in [1/4;\ 1]$, если $\dfrac{1}{2(1-a)} < 1/4$, т. е. $a < -1$.

Ответ: $a < -1$.

№ 11. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{1/x^2 - 1/a^2} \geqslant 1/x - 1/a, \\ (x^2+2)/(x^2-2x+1) + 2\sqrt{x^2+2}\,/(x-1) + 1 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ООС: } \begin{cases} a \neq 0, \\ 1/x^2 - 1/a^2 \geqslant 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Решим сначала второе неравенство системы, переписав его в виде $(\sqrt{x^2+2}\,/(x-1)+1)^2 \leqslant 0$. Тогда получаем уравнение $\sqrt{x^2+2}\,/(x-1)+1=0$, откуда $x=-1/2$.

Подставим $x=-1/2$ в первое неравенство и решим его относительно a: $\sqrt{4-1/a^2} \geqslant -2-1/a$.

Введем замену: пусть $1/a = t$. Тогда получим неравенство $\sqrt{4-t^2} \geqslant -2-t$, которое в своей области определения равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \geqslant -2, \\ 4-t^2 \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} t < -2, \\ 4-t^2 \geqslant 4+4t+t^2, \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} -2 \leqslant t \leqslant 2, \\ \begin{cases} t < -2, \\ t^2+2t \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Легко видеть, что вторая система совокупности решений не имеет. Поэтому $t \in [-2;\ 2]$. Вернемся к замене:

$$\begin{cases} 1/a \leqslant 2, \\ 1/a \geqslant -2, \end{cases} \qquad \begin{cases} (1-2a)/a \leqslant 0, \\ (1+2a)/a \geqslant 0 \end{cases} \text{ (рис. 237).}$$

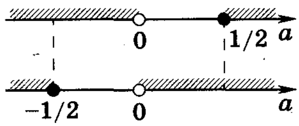


Рис. 237

$a \in (-\infty;\ -1/2] \cup [1/2;\ +\infty)$.

Ответ: 1) Если $a \in (-\infty; -1/2] \cup [1/2; +\infty)$,
то $x = -1/2$.
2) Если $a \in (-1/2; 1/2)$, то решений нет.

№ 12. Решите систему неравенств $\begin{cases} \sqrt{bx+b} \geqslant x, \\ x-2 \geqslant 0. \end{cases}$

Решение.

ООС: $\begin{cases} bx+b \geqslant 0, \\ b \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1 способ.

Перепишем данную систему в виде $\begin{cases} \sqrt{bx+b} \geqslant x, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$

Учитывая, что $x \geqslant 2$, замечаем, что обе части первого неравенства принимают неотрицательные значения. Поэтому можно перейти к системе

$$\begin{cases} bx+b \geqslant x^2, \\ x \geqslant 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-bx-b \leqslant 0, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$$

Задача свелась к решению неравенства второй степени $x^2 - bx - b \leqslant 0$ с дополнительным условием $(x \geqslant 2)$.

1) $\mathrm{D} < 0$, $b(b+4) < 0$, $-4 < b < 0$. В этом случае решений нет.

2) $\mathrm{D} = 0$:

а) если $b = 0$, то система $\begin{cases} x^2 \leqslant 0, \\ x \geqslant 2, \end{cases}$ а также данная система решений не имеют;

б) если $b = -4$, то система $\begin{cases} (x+2)^2 \leqslant 0, \\ x \geqslant 2 \end{cases}$ решений не имеет.

3) Пусть $\mathrm{D} > 0$, т. е. $b \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

$x_1 = \dfrac{b - \sqrt{b^2+4b}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{b + \sqrt{b^2+4b}}{2}$ — корни квадратного трехчлена $x^2 - bx - b$.

7 – 5664

Воспользуемся теоремами о расположении корней квадратного трехчлена, чтобы узнать, когда система имеет решения при $b \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

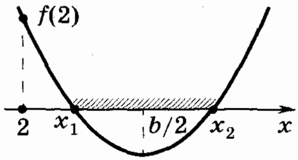


Рис. 238

а) $x_1 > 2$ и $x_2 > 2$ (рис. 238).

В этом случае

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} & b > 0, \\ & b < -4, \end{aligned}\right. \\ x_{\text{вершины}} > 2, \\ f(2) > 0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} \left[\begin{aligned} & b > 0, \\ & b < -4, \end{aligned}\right. \\ b/2 > 2, \\ 4 - 3b > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} & b > 0, \\ & b < -4, \end{aligned}\right. \\ b > 4, \\ b < 4/3. \end{cases}$$

Такой случай невозможен.

б) $x_1 = 2$. Такой случай невозможен, так как уравнение $2 = \dfrac{b - \sqrt{b^2 + 4b}}{2}$ решений не имеет.

в) Корни лежат по обе стороны от 2 (рис. 239), т. е. $2 \in (x_1; x_2)$. В этом случае:

$4 - 3b < 0$, $b > 4/3$.

Тогда $x \in \left[2; \dfrac{b + \sqrt{b^2 + 4b}}{2}\right]$. (*)

г) $x_2 = 2$ (рис. 240). Подставляем 2 в выражение для x_2, решаем уравнение.

$b = 4/3$.

Итак, при $b \geqslant 4/3$ решения есть.

Тогда, если $b \in (-\infty; -4) \cup [0; 4/3)$, то решений нет.

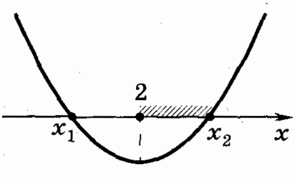


Рис. 239

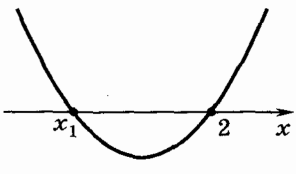


Рис. 240

Представим результаты на оси ответа (рис. 241).

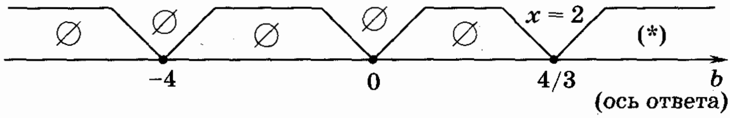


Рис. 241

Ответ: 1) Если $b = 4/3$, то $x = 2$.

2) Если $b > 4/3$, то $x \in \left[2; \dfrac{b + \sqrt{b^2 + 4b}}{2}\right]$.

3) Если $b < 4/3$, то решений нет.

2 способ.

Как было описано выше, решаем систему неравенств $\begin{cases} x^2 - bx - b \leqslant 0, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$

Разделим обе части первого неравенства на $x + 1$: $x^2/(x + 1) - b \leqslant 0$. Представим $x^2/(x + 1)$ в виде $x + 1 + 1/(x + 1) - 2$. Тогда получим систему $\begin{cases} x + 1 + 1/(x + 1) - 2 - b \leqslant 0, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$

Пусть $x + 1 = t$: $\begin{cases} t + 1/t \leqslant 2 + b, \\ t \geqslant 3. \end{cases}$

Решаем графически в системе координат (tOy). Рассматриваем две функции: $y = t + 1/t$, $y = 2 + b$, учитывая, что $t \geqslant 3$ (рис. 242).

1) Если $t = 3$, то $y = 3\frac{1}{3}$: $\begin{cases} x + 1 = 3, \\ 2 + b = 3\frac{1}{3}, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ b = 4/3. \end{cases}$

2) Если $b < 4/3$, то решений нет.

3) Пусть $b > 4/3$. Тогда прямая $y = 2 + b$ пересекает график функции $y = t + 1/t$, где $t \geqslant 3$, в одной точке. Найдем ее абсциссу: $t + 1/t = 2 + b$, $t^2 - (2 + b)t + 1 = 0$, $t_1 = (2 + b + \sqrt{b^2 + 4b})/2$.

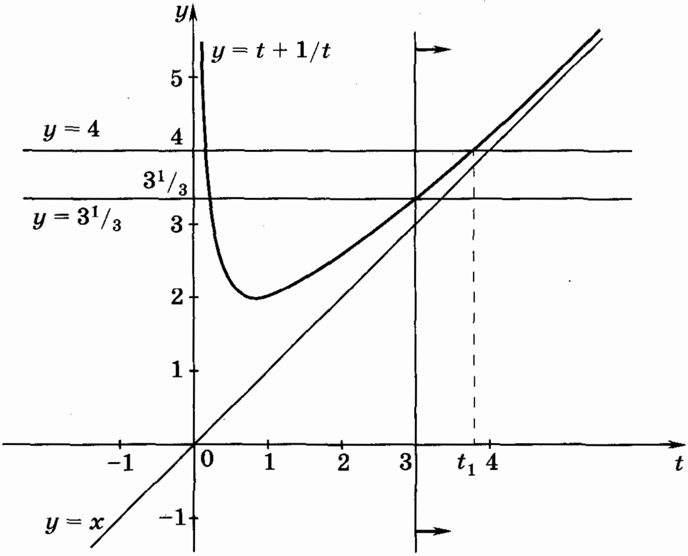


Рис. 242

Имеем $3 \leqslant t \leqslant (2 + b + \sqrt{b^2 + 4b})/2$,

$$3 \leqslant x + 1 \leqslant \frac{2 + b + \sqrt{b^2 + 4b}}{2},$$

$$2 \leqslant x \leqslant \frac{b + \sqrt{b^2 + 4b}}{2}.$$

№ 13. При каких значениях $a < 0$ неравенства $2\sqrt{ax} \leqslant 3a - x$ и $x - \sqrt{x/a} \geqslant 6/a$ имеют общие решения?

Решение.

1. Решаем сначала первое неравенство, учитывая, что $a < 0$.

ООН: $\begin{cases} a < 0, \\ x \leqslant 0. \end{cases}$ Тогда в ООН это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x \leqslant 0, \\ a < 0, \\ x \leqslant 3a, \\ 4ax \leqslant 9a^2 - 6ax + x^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 0, \\ x \leqslant 3a, \\ x^2 - 10ax + 9a^2 \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 0, \\ x \leqslant 3a, \\ (x-a)(x-9a) \geqslant 0 \text{ (рис. 243)}. \end{cases}$$

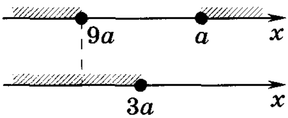


Рис. 243

Итак, если $a < 0$, то $x \in (-\infty; 9a]$.

2. Область определения второго неравенства та же, что у первого неравенства.

Перейдем сначала к неравенству $\sqrt{x/a} \leqslant x - 6/a$, а затем к системе

$$\begin{cases} 6/a \leqslant x \leqslant 0, \\ x/a \leqslant x^2 - 12x/a + 36/a^2, \\ a < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 6/a \leqslant x \leqslant 0, \\ x^2 - 13x/a + 36/a^2 \geqslant 0, \\ a < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6/a \leqslant x \leqslant 0, \\ (x - 4/a)(x - 9/a) \geqslant 0, \\ a < 0 \text{ (рис. 244)}. \end{cases}$$

Получаем, что при $a < 0$ $x \in [4/a; 0]$.

А теперь покажем, как должны располагаться найденные множества решений, чтобы их пересечение не было пустым (рис. 245).

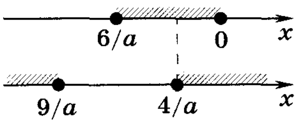


Рис. 244

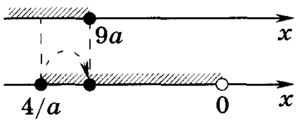


Рис. 245

Достаточно решить систему неравенств

$$\begin{cases} 4/a \leqslant 9a, \\ a < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 9a^2 \leqslant 4, \\ a < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} |3a| \leqslant 2, \\ a < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a \leqslant 2, \\ a < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a \geqslant -2/3, \\ a < 0, \end{cases} \quad -2/3 \leqslant a < 0.$$

Ответ: $[-2/3; 0)$.

№ 14. При каких значениях a неравенство $\sqrt{(a - x^2)(x^2 + a)} + a > x$ имеет ровно два различных целочисленных решения?

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде

$\sqrt{(a-x^2)(x^2+a)} > x-a$

и перейдем к равносильной ему совокупности систем

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x<a,\\ a^2-x^4\geqslant 0,\end{cases} && (1)\\ &\begin{cases}x\geqslant a,\\ a^2-x^4>(x-a)^2.\end{cases} && (2)\end{aligned}\right.$$

Заметим, что при $a=0$ данное неравенство решений не имеет.

Решим сначала систему (1) графически в системе координат (xOa) (рис. 246).

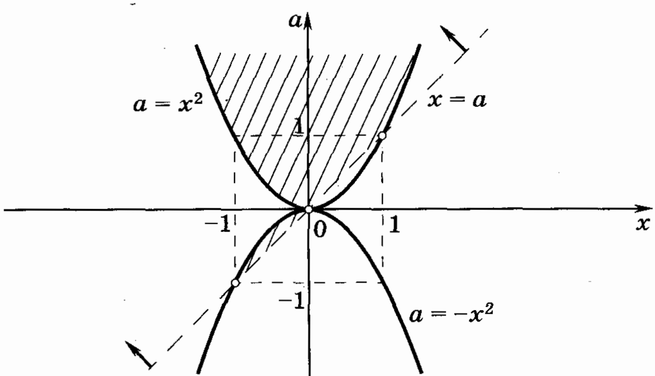


Рис. 246

1) Если $a<1$, $a\neq 0$, то система (1) не имеет целочисленных решений, а при $a<-1$ вообще не имеет решений.

2) Если $a=1$, то $x=-1$, $x=0$.

3) Если $a>1$, то система имеет, по крайней мере, три целочисленных решения: -1; 0; 1.

Рассмотрим систему (2):

$\begin{cases}x\geqslant a,\\ a^2-x^4>x^2-2ax+a^2,\end{cases}$ $\begin{cases}x(x^3+x-2a)<0,\\ x\geqslant a,\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\x\geqslant a,\\x^3+x<2a,\end{cases}\\\begin{cases}x<0,\\x\geqslant a,\\x^3+x>2a,\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant a,\\a>0,\\(x^3+x)/2<a,\end{cases}\\\begin{cases}a\leqslant x<0,\\a<0,\\(x^3+x)/2>a\end{cases}\end{array}\right.$$ (рис. 247).

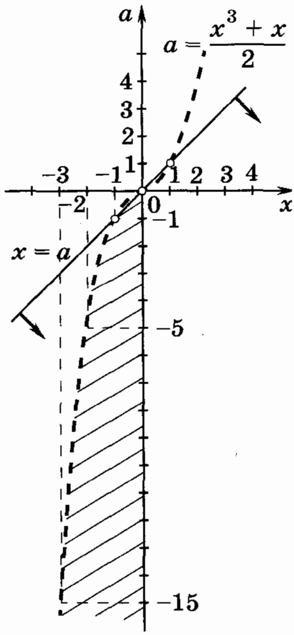


Рис. 247

1) Если $a \geqslant -1$, то система (2) целочисленных решений не имеет.

2) Если $-5 \leqslant a < -1$, то одно целочисленное решение $x = -1$.

3) Если $-15 \leqslant a < -5$, то два целочисленных решения $x = -2$, $x = -1$.

4) Если $a < -15$, то целочисленных решений больше 2.

Ответ: $a \in [-15; -5) \cup \{1\}$.

№ 15. Решите неравенство $1 - |x| \geqslant \sqrt{x^2 - a^2}$.

Решение.

ООН: $\begin{cases}a \in \mathrm{R},\\|x| \geqslant |a|.\end{cases}$

Изобразим ООН на плоскости в системе координат (aOx) (рис. 248).

Учитывая, что множества точек M и N симметричны относительно координатных осей, рассмотрим сначала случай, когда $x \geqslant 0$, а затем сделаем вывод для множества N.

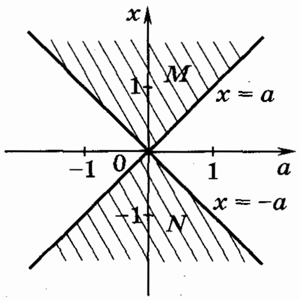


Рис. 248

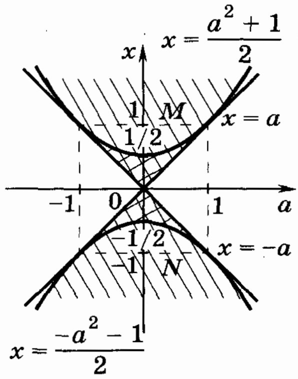


Рис. 249

Решаем систему неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \sqrt{x^2 - a^2} \leqslant 1 - x, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 - a^2 \geqslant 0, \\ x^2 - a^2 \leqslant (1 - x)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x \geqslant |a|, \\ x \leqslant \dfrac{a^2 + 1}{2} \end{cases} \qquad \text{(рис. 249).}$$

Таким образом, на множестве M:

1) Если $|a| > 1$, то последняя система решений не имеет.

2) Если $|a| = 1$, то $x = 1$.

3) Если $a = 0$, то $0 \leqslant x \leqslant 1/2$.

4) Если $0 < |a| < 1$, то $|a| \leqslant x \leqslant \dfrac{a^2 + 1}{2}$.

На множестве N:

1) Если $|a| > 1$, то решений нет.

2) Если $|a| = 1$, то $x = -1$.

3) Если $a = 0$, то $-1/2 \leqslant x \leqslant 0$.

4) Если $0 < |a| < 1$, то $(-a^2 - 1)/2 \leqslant x \leqslant -|a|$.

Ответ: 1) Если $|a| > 1$, то решений нет.
2) Если $|a| = 1$, то $x = \pm 1$.
3) Если $a = 0$, то $-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2$.
4) Если $0 < |a| < 1$, то $|a| \leqslant x \leqslant (a^2+1)/2$ и $(-a^2-1)/2 \leqslant x \leqslant -|a|$.

№ 16. Решите неравенство $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} < a$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a + x \geqslant 0, \\ a - \sqrt{a+x} \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -a, \\ \sqrt{a+x} \leqslant a, \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant -a, \\ a \geqslant 0, \\ a + x \leqslant a^2, \end{cases}$ $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ -a \leqslant x \leqslant a^2 - a. \end{cases}$

Покажем ООН в системе координат (aOx) (рис. 250).

В своей области определения данное неравенство равносильно системе

$\begin{cases} a > 0, \\ a - \sqrt{a+x} < a^2, \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ \sqrt{a+x} > a - a^2, \end{cases}$

$\begin{cases} a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - a^2 < 0, \\ a + x \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a - a^2 \geqslant 0, \\ a + x > (a - a^2)^2, \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ a - a^2 < 0, \\ a + x \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0, \\ a - a^2 \geqslant 0, \\ a + x > (a - a^2)^2, \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ a > 1, \\ x \geqslant -a, \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0, \\ a \leqslant 1, \\ x > (a - a^2)^2 - a, \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ x \geqslant -a, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a \leqslant 1, \\ x > (a - a^2)^2 - a. \end{cases} \end{array}\right.$

Учитывая ООН, получим

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ -a \leqslant x \leqslant -a + a^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a \leqslant 1, \\ (a - a^2)^2 - a < x \leqslant -a + a^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

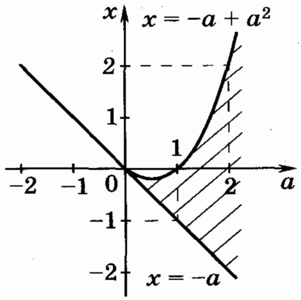


Рис. 250

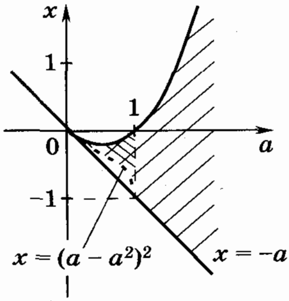


Рис. 251

Результаты решения представлены на рис. 251. График функции $x = (a - a^2)^2 - a$ изображен жирным пунктиром.

Заполняем ось ответа (рис. 252).

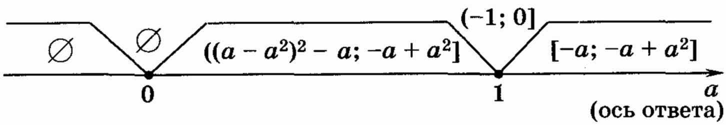


Рис. 252

Ответ: 1) Если $0 < a \leqslant 1$,
то $x \in ((a - a^2)^2 - a; a^2 - a]$.
2) Если $a > 1$, то $x \in [-a; a^2 - a]$.
3) Если $a \leqslant 0$, то решений нет.

№ 17. При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt{1 - x^2} > a - x$ имеет решения?

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in [-1; 1]. \end{cases}$

1 способ.

Так как $|x| \leqslant 1$, то можно ввести обозначение $x = \cos\alpha$, где $\alpha \in [0; \pi]$. Тогда данное неравенство примет вид $\sqrt{1 - \cos^2\alpha} > a - \cos\alpha$, откуда

$|\sin\alpha| > a - \cos\alpha$. Так как $\alpha \in [0; \pi]$, то $\sin\alpha \geqslant 0$, поэтому $\sin\alpha > a - \cos\alpha$ или $\sin\alpha + \cos\alpha > a$. Воспользовавшись формулой $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos(\alpha - \pi/4)$, получим $a < \sqrt{2}\cos(\alpha - \pi/4)$. Наибольшее значение функции $y = \sqrt{2}\cos(\alpha - \pi/4)$ равно $\sqrt{2}$. Поэтому исходное неравенство имеет решения при $a < \sqrt{2}$.

2 способ.

Решим задачу графически в системе координат (xOy), построив графики функций $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = a - x$ (рис. 253).

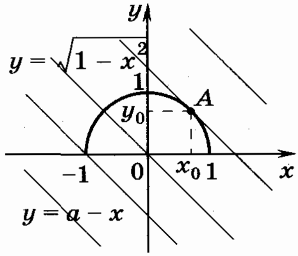


Рис. 253

Выясним, при каком a прямая $y = a - x$ является касательной к графику функции $y = \sqrt{1 - x^2}$. Для этого воспользуемся производной: $y'(x_0) = -1$; $y'(x_0) = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, откуда $x_0 = \sqrt{2}/2$, $y_0 = \sqrt{2}/2$, $a = \sqrt{2}$. Из рисунка видно, что неравенство имеет решения при $a < \sqrt{2}$.

Ответ: $a < \sqrt{2}$.

№ 18. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} \leqslant -\dfrac{x^2 + 9}{a + \cos x} - a$ имеет единственное решение.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ \cos x \neq -a. \end{cases}$

Перепишем неравенство в виде

$$a + \cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} + (x^2 + 9)/(a + \cos x) \leqslant 0$$

и преобразуем его левую часть: $((a + \cos x)^2 - 2\sqrt{x^2+9} \cdot (a + \cos x) + x^2 + 9)/(a + \cos x) \leqslant 0$,

$(a + \cos x - \sqrt{x^2+9}\,)^2/(a + \cos x) \leqslant 0$.

Данное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} a + \cos x - \sqrt{x^2+9} = 0, \\ a + \cos x < 0. \end{array}\right.$$

Неравенство $a + \cos x < 0$ не может иметь единственного решения ни при каком значении параметра a.

Поэтому, исходя из условия задачи, уравнение $a + \cos x - \sqrt{x^2+9} = 0$ должно иметь единственное решение, а неравенство $a + \cos x < 0$ — не иметь решений.

Неравенство $a + \cos x < 0$ не имеет решений при $a \geqslant 1$.

Рассмотрим уравнение $\sqrt{x^2+9} = \cos x + a$ при $a \geqslant 1$: $x^2 = (a + \cos x)^2 - 9$. Так как $x^2 = (-x)^2$ и $\cos x = \cos(-x)$, то единственное решение уравнение будет иметь при $x = 0$. Найдем соответствующее значение a:

$$\begin{cases} 0 = (a+1)^2 - 9, \\ a \geqslant 1, \end{cases} \quad a = 2.$$

Действительно, при $a = 2$ уравнение примет вид $\sqrt{x^2+9} = \cos x + 2$. Область значений функции $y = \sqrt{x^2+9}$ — $[3; +\infty)$, а функции $y = \cos x + 2$ — отрезок $[1; 3]$. Поэтому равенство будет верным лишь при $x = 0$.

Ответ: $a = 2$.

№ 19. Решите неравенство $\sqrt{x+a} \geqslant x + 1$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant -a. \end{cases}$

1 способ (аналитический).

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ x+a\geqslant x^2+2x+1,\end{cases}\\ \begin{cases}x+1<0,\\ x+a\geqslant 0;\end{cases}\end{array}\right. \text{ откуда } \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x\geqslant -1,\\ x^2+x+1-a\leqslant 0,\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}x<-1,\\ x\geqslant -a.\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Решаем систему (1): $\begin{cases}x\geqslant -1,\\ x^2+x+1-a\leqslant 0.\end{cases}$

Чтобы система была совместна, последнее неравенство должно иметь решения.

$D = 4a - 3$,

$D \geqslant 0$, поэтому $a \geqslant 3/4$.

1) $D = 0$, $a = 3/4$: $x = -1/2$.

2) $D > 0$, $a > 3/4$:

$x_1 = (-1 - \sqrt{4a-3})/2$; $x_2 = (-1 + \sqrt{4a-3})/2$ (рис. 254).

$x \in [(-1 - \sqrt{4a-3})/2; (-1 + \sqrt{4a-3})/2]$.

Ясно, что $x_2 > -1$. Сравним x_1 и -1:

если $3/4 < a < 1$, то $x_1 > -1$;

если $a = 1$, то $x_1 = -1$;

если $a > 1$, то $x_1 < -1$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

а) $a \in (3/4; 1)$, $x_1 > -1$ (рис. 255),

$x \in [(-1 - \sqrt{4a-3})/2; (-1 + \sqrt{4a-3})/2]$.

б) $a = 1$, $x_1 = -1$ (рис. 256), $x \in [-1; 0]$.

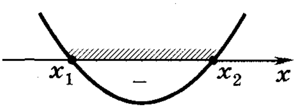


Рис. 254

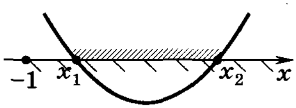


Рис. 255

в) $a > 1$, $x_1 < -1$ (рис. 257),

$x \in [-1; (-1 + \sqrt{4a - 3})/2]$.

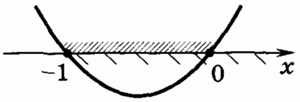


Рис. 256

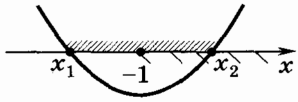


Рис. 257

Решаем систему (2): $\begin{cases} x < -1, \\ x \geqslant -a. \end{cases}$

Система совместна при $a > 1$: $x \in [-a; -1)$. Решение совокупности представлено на оси ответа (рис. 258).

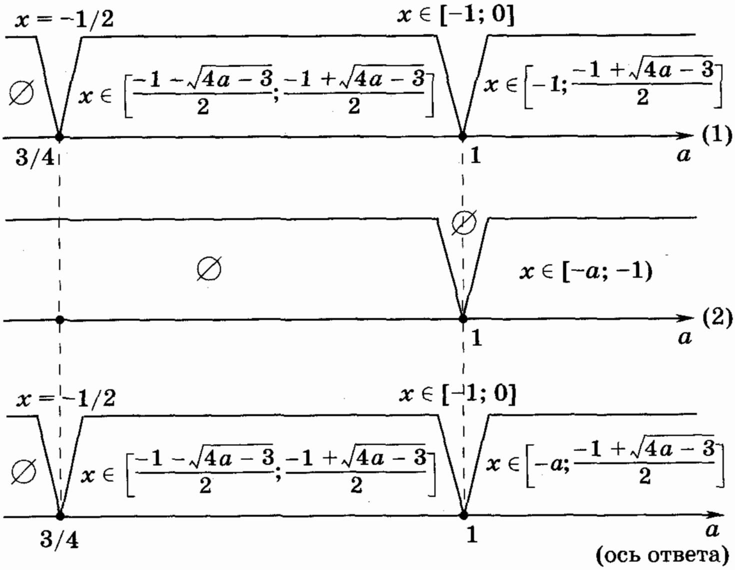


Рис. 258

<u>Ответ</u>: 1) Если $a < 3/4$, то решений нет.

2) Если $a \in (3/4; 1]$,

то $x \in [(-1 - \sqrt{4a - 3})/2; (-1 + \sqrt{4a - 3})/2]$.

3) Если $a > 1$, то $x \in [-a; (-1 + \sqrt{4a - 3})/2]$.

4) Если $a = 3/4$, то $x = -1/2$.

2 способ (графический в системе координат (xOy)).

Построим графики функций $y = x + 1$ и $y = \sqrt{x + a}$ и рассмотрим различные случаи их взаимного расположения.

1) Графики функций $y = \sqrt{x + a}$ расположены ниже прямой (рис. 259). Неравенство не имеет решений. Найдем соответствующие значения a.

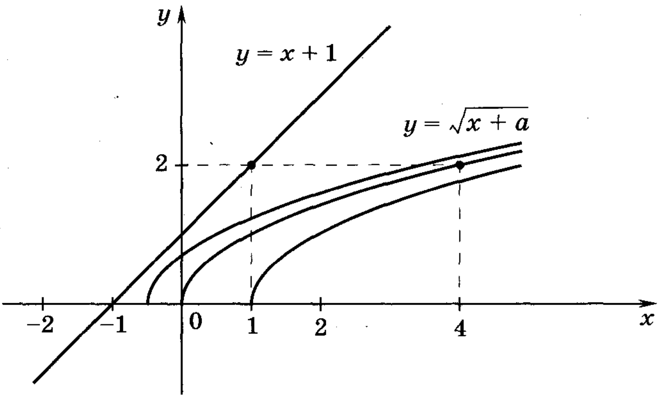


Рис. 259

Система $\begin{cases} y = \sqrt{x + a}, \\ y = x + 1 \end{cases}$ не имеет решений, т. е. квадратное уравнение $x^2 + x + 1 - a = 0$ не имеет корней.

$D = 4a - 3$, $a < 3/4$.

2) График одной из функций $y = \sqrt{x + a}$ касается прямой $y = x + 1$ (рис. 260). Неравенство имеет единственное решение.

$D = 0$: $a = 3/4$, $x = -1/2$ — абсцисса точки касания. (Этот результат мог быть получен и с помощью производной, так как $y = x + 1$ — касательная к графику функции $y = \sqrt{x + a}$.)

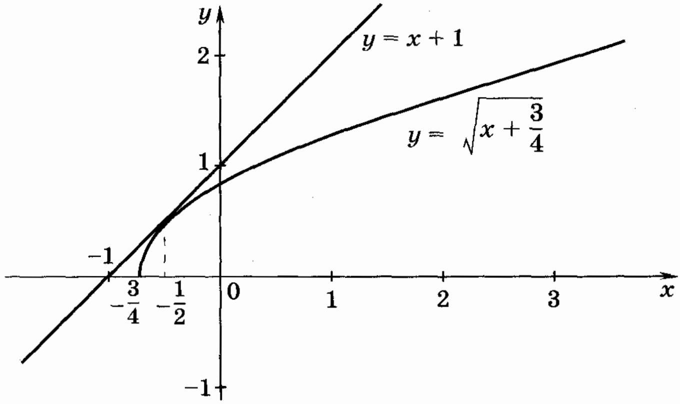


Рис. 260

3) Графики функций $y = \sqrt{x + a}$ и $y = x + 1$ пересекаются в двух точках (рис. 261): $a \in [3/4; 1]$.

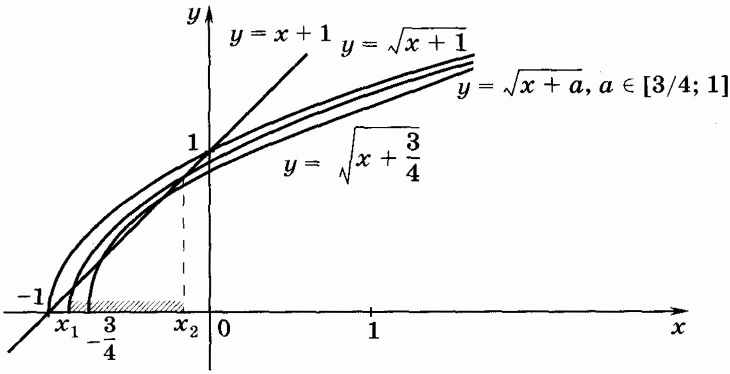


Рис. 261

$x_1 = (-1 - \sqrt{4a - 3})/2$, $x_2 = (-1 + \sqrt{4a - 3})/2$.

$x \in [(-1 - \sqrt{4a - 3})/2; (-1 + \sqrt{4a - 3})/2]$.

4) Графики функций $y = \sqrt{x + a}$ и $y = x + 1$ пересекаются в одной точке (рис. 262): $a > 1$.

$x \in [-a; (-1 + \sqrt{4a - 3})/2]$.

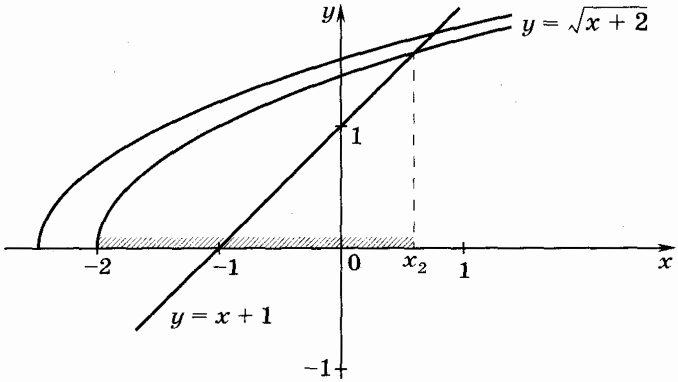


Рис. 262

3 способ (графически в системе координат (xOa)). Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1<0, \\ a \geqslant -x, \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ a \geqslant x^2+x+1, \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-1, \\ a \geqslant -x, \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x \geqslant -1, \\ a \geqslant x^2+x+1. \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Решим каждую из систем графически в системе (xOa) (рис. 263 и 264), а затем объединим полученные решения.

Найдем координаты вершины параболы

$a = x^2 + x + 1$: $x_0 = -1/2$, $y_0 = 3/4$.

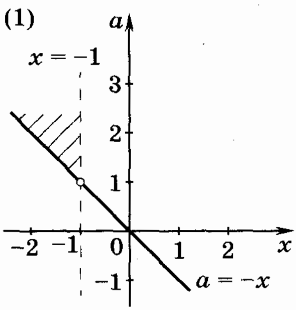


Рис. 263

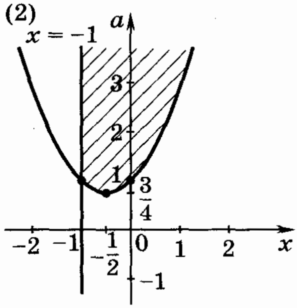


Рис. 264

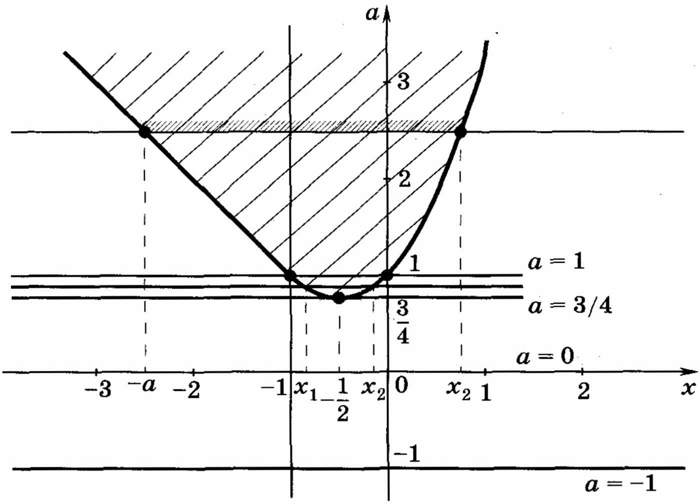


Рис. 265

Изобразим теперь в системе (xOa) множество решений совокупности (рис. 265).

Прямая $a = -x$ касается параболы $a = x^2 + x + 1$ в точке $(-1; 1)$.

Будем рассекать изображенное множество точек плоскости горизонтальными прямыми.

1) Если $a < 3/4$, то решений нет.

2) Если $a = 3/4$, то $x = -1/2$.

3) Если $a \in (3/4; 1]$, то $x \in [x_1; x_2]$, где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + x + 1 = a$: $x_1 = (-1 - \sqrt{4a - 3})/2$; $x_2 = (-1 + \sqrt{4a - 3})/2$.

4) Если $a > 1$, то $x \in [-a; (-1 + \sqrt{4a - 3})/2]$.

№ 20. Найдите наибольшее значение величины a, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}\,(x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \leqslant \sqrt[4]{a^3}\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

1) Если $a = 0$, то данное неравенство верно при всех $x \neq 1$.

2) Пусть $a > 0$. Разделим обе части неравенства на $\sqrt[4]{a^3}$: $\sqrt[4]{a^3} \cdot (x-1)^2 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{a} \cdot (x-1)^2} \leqslant \left|\sin \dfrac{\pi x}{2}\right|$.

Для существования хотя бы одного решения правая часть этого неравенства должна быть не меньше наименьшего значения левой части.

Воспользуемся для оценки левой части неравенством Коши $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$. Тогда

$$\sqrt[4]{a^3} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{\sqrt[4]{a} \cdot (x-1)^2} \geqslant 2\sqrt[4]{a}.$$

Выясним, при каких значениях x достигается равенство:

$$\sqrt[4]{a^3} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{\sqrt[4]{a} \cdot (x-1)^2} = 2\sqrt[4]{a};$$

$$\sqrt{a} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{\sqrt{a} \cdot (x-1)^2} - 2 = 0;$$

$$\sqrt{a}\,(x-1)^2 = 1,$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -1/\sqrt[4]{a} + 1, \\ x = 1/\sqrt[4]{a} + 1. \end{array}\right.$$

Исходное неравенство имеет хотя бы одно решение, если $2\sqrt[4]{a} \leqslant \left|\sin \dfrac{\pi x}{2}\right|$, т. е. $16a \leqslant \sin^4 \dfrac{\pi x}{2}$, откуда $a \leqslant \dfrac{1}{16} \sin^4 \dfrac{\pi x}{2}$. Так как $\sin^4 \dfrac{\pi x}{2} \in [0;\ 1]$, то $0 < a \leqslant 1/16$. Наибольшее значение $a = 1/16$.

Ответ: $a = 1/16$.

№ 21. Решите неравенство

$$x + \sqrt{x + 1/2 + \sqrt{x + 1/4}} < a.$$

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant -1/4. \end{cases}$

1) Если $a \leqslant 0$, то решений нет.

2) Пусть $a > 0$. Преобразуем левую часть неравенства:

$$x + \sqrt{x + 1/2 + \sqrt{x + 1/4}} =$$
$$= x + \sqrt{(\sqrt{x + 1/4})^2 + \sqrt{x + 1/4} + 1/4} =$$
$$= x + \sqrt{(\sqrt{x + 1/4} + 1/2)^2} = x + \sqrt{x + 1/4} + 1/2 =$$
$$= (\sqrt{x + 1/4})^2 + \sqrt{x + 1/4} + 1/4 =$$
$$= (\sqrt{x + 1/4} + 1/2)^2.$$

Неравенство примет вид

$$(\sqrt{x + 1/4} + 1/2)^2 < a, \qquad \begin{cases} \sqrt{x + 1/4} + 1/2 < \sqrt{a}, \\ \sqrt{x + 1/4} + 1/2 > -\sqrt{a}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x + 1/4} < \sqrt{a} - 1/2, \\ \sqrt{x + 1/4} > -\sqrt{a} - 1/2. \end{cases}$$

Второе неравенство системы выполняется при всех $a > 0$ и $x \geqslant -1/4$.

Теперь решим первое неравенство системы.

а) Если $\sqrt{a} - 1/2 \leqslant 0$, т. е. $a \in (0; 1/4]$, то решений нет.

б) Если $\sqrt{a} - 1/2 > 0$, т. е. $a > 1/4$, то

$x \in [-1/4; a - \sqrt{a})$.

Наносим результаты на ось ответа (рис. 266).

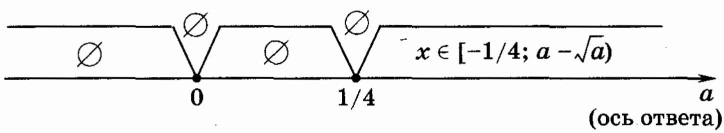


Рис. 266

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \leqslant 1/4$, то решений нет.

2) Если $a > 1/4$, то $x \in [-1/4;\ a - \sqrt{a})$.

№ 22. Найдите все значения параметра a, при которых все числа x из отрезка $[1;\ 5]$ удовлетворяют неравенству $3ax + 2\sqrt{3x+1} - 6x + a - 5 < 0$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant -1/3. \end{cases}$

Пусть $\sqrt{3x+1} = t$, где $t \geqslant 0$, откуда $x = (t^2 - 1)/3$.
По условию $x \in [1;\ 5]$, поэтому $t \in [2;\ 4]$.
Неравенство примет вид $(a-2)t^2 + 2t - 3 < 0$. Решение задачи сводится к нахождению таких значений параметра a, при которых данное неравенство выполняется для всех $t \in [2;\ 4]$.
Рассмотрим несколько случаев.

1) $a = 2$: $t < 3/2$. Не удовлетворяет условию задачи.

2) $D_1 = 3a - 5$; $a > 2$, тогда $D_1 > 0$ (рис. 267).

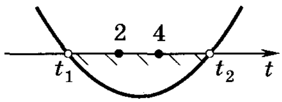


Рис. 267

Пусть $f(t) = (a-2)t^2 + 2t - 3$.

Воспользуемся теоремой о расположении корней квадратного трехчлена:

$\begin{cases} a > 2, \\ f(2) < 0, \\ f(4) < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 2, \\ a < 7/3, \\ a < 27/16. \end{cases}$

Система не имеет решений.

3) $a < 2$.

а) $D_1 > 0$, т. е. $a \in (5/3;\ 2)$ (рис. 268, 269).

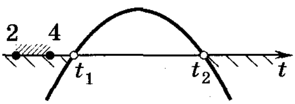


Рис. 268

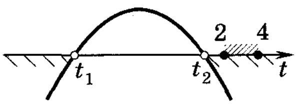


Рис. 269

По теоремам о расположении корней квадратного трехчлена:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\dfrac{1}{a-2} > 4, \\ f(4) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -\dfrac{1}{a-2} < 2, \\ f(2) < 0, \end{cases} \end{array}\right. \\ a \in (5/3;\ 2), \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \in (7/4;\ 2), \\ a < 27/16; \end{cases} \\ \begin{cases} a \in (-\infty;\ 3/2) \cup (2;\ +\infty), \\ a < 7/3, \end{cases} \end{array}\right. \\ a \in 5/3;\ 2). \end{cases}$$

Система не имеет решений.

б) $D_1 = 0$, т. е. $a = 5/3$ (рис. 270).

$t_0 = 3 \in [2;\ 4]$,

$a = 5/3$ не удовлетворяет условию задачи.

в) $D_1 < 0$, т. е. $a < 5/3$ (рис. 271).

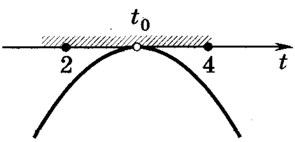


Рис. 270

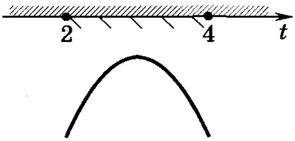


Рис. 271

Неравенство выполняется при всех $t \in [2;\ 4]$.

Ответ: $a \in (-\infty;\ 5/3)$.

№ 23. Решите систему

$$\begin{cases} ax + 3x > 0, \\ x + \dfrac{1 + a\sqrt{x^2+1}}{3} + \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} > a^2. \end{cases}$$

Решение.

ООС: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Преобразуем левую часть второго неравенства, умножив числитель и знаменатель дроби $\dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$ на выражение $x - \sqrt{x^2+1} \neq 0$.

Система примет вид

$$\begin{cases}(a+3)x>0,\\(a+3)\cdot\sqrt{x^2+1}>3a^2-1.\end{cases}$$

Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть $a=-3$: $\begin{cases}0\cdot x>0,\\0\cdot\sqrt{x^2+1}>26.\end{cases}$

Система не имеет решений.

2) Пусть $a>-3$: $\begin{cases}x>0,\\\sqrt{x^2+1}>\dfrac{3a^2-1}{a+3}.\end{cases}$

Решим второе неравенство системы.

а) $a\in[-\sqrt{3}/3;\ \sqrt{3}/3]$: $x\in\mathbb{R}$.
Так как $x>0$, то решениями системы будут все действительные положительные числа.

б) $a\in(-3;-\sqrt{3}/3)\cup(\sqrt{3}/3;+\infty)$.

Тогда $x^2+1>\left(\dfrac{3a^2-1}{a+3}\right)^2$,

$$x^2>\frac{3(a-4/3)(a+1)(3a^2+a+2)}{(a+3)^2}.$$

Тогда возможны случаи:

1. Если $a\in(-1;-\sqrt{3}/3)\cup(\sqrt{3}/3;4/3)$, то $x\in\mathbb{R}$. Учтем первое неравенство системы: $x>0$.
2. Если $a=4/3$ или $a=-1$, то $x\neq 0$. Решениями системы будут все $x>0$.
3. Если $a\in(-3;-1)\cup(4/3;+\infty)$, то

$$|x|>\frac{\sqrt{9a^4-25a^2-6a-8}}{a+3}.$$

Так как $x>0$, то

$$x\in\left(\frac{\sqrt{9a^4-25a^2-6a-8}}{a+3};+\infty\right).\qquad(*)$$

3) Пусть $a < -3$:

$$\begin{cases} x < 0, \\ \sqrt{x^2+1} < (3a^2-1)/(a+3). \end{cases}$$

Так как $(3a^2 - 1)/(a + 3) > 0$ при всех $a < -3$, то

$$x^2 + 1 < \left(\frac{3a^2-1}{a+3}\right)^2,$$

$x^2 < (3(a - 4/3)(a + 1)(3a^2 + a + 2))/(a + 3)^2$, откуда

$$|x| < -\sqrt{9a^4 - 25a^2 - 6a - 8}\,/(a+3).$$

Так как $x < 0$, то

$$x \in (\sqrt{9a^4 - 25a^2 - 6a - 8}\,/(a+3);\ 0). \qquad (**)$$

Заполним ось ответа (рис. 272).

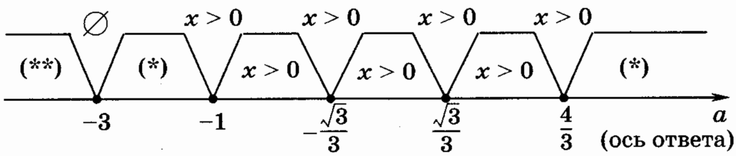


Рис. 272

Ответ: 1) Если $a < -3$,

то $x \in (\sqrt{9a^4 - 25a^2 - 6a - 8}\,/(a+3);\ 0)$.

2) Если $a = -3$, то решений нет.

3) Если $a \in (-3; -1) \cup (4/3; +\infty)$,

то $x \in (\sqrt{9a^4 - 25a^2 - 6a - 8}\,/(a+3);\ +\infty)$.

4) Если $a \in [-1; 4/3]$, то $x \in (0; +\infty)$.

№ 24. Найдите все значения x, для которых неравенство $\sqrt{0{,}5x^2 - x + a} > ax^2 + (2a - 1)(x + 2) - 3a$ выполняется для всех a из отрезка $[-3; 0]$.

Решение.

Представим данное неравенство в виде

$$\sqrt{0{,}5x^2 - x + a} > a + (x+1)^2 - (x+1) - 1.$$

Введем замену: $t = x + 1$, $x = t - 1$. Получим неравенство $\sqrt{a + 0{,}5(t^2 - 4t + 3)} > at^2 - t - 1$, которое сводится к совокупности систем

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} at^2 < t + 1, \\ a + 0{,}5(t^2 - 4t + 3) \geqslant 0, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} at^2 \geqslant t + 1, \\ a + 0{,}5(t^2 - 4t + 3) > (at^2 - t - 1)^2. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решаем сначала систему (1):

$$\begin{cases} at^2 < t + 1, \\ a \geqslant \dfrac{-t^2 + 4t - 3}{2}. \end{cases}$$

1) Если $t = 0$, то $a \geqslant -3/2$. Но $[-3; 0] \not\subset [-3/2; +\infty)$.

2) Пусть $t \neq 0$:

$$\begin{cases} a < \dfrac{t + 1}{t^2}, \\ a \geqslant \dfrac{-t^2 + 4t - 3}{2}. \end{cases}$$

Нас интересуют два случая: а) и б).

а) Рис. 273.

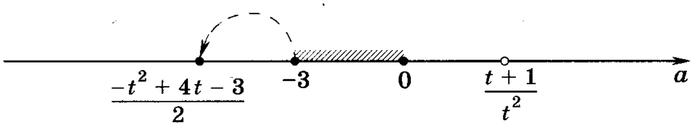


Рис. 273

Приходим к системе

$$\begin{cases} \dfrac{t + 1}{t^2} > 0, \\ \dfrac{-t^2 + 4t - 3}{2} \leqslant -3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > -1, \\ t^2 - 4t - 3 \geqslant 0 \text{ (рис. 274).} \end{cases}$$

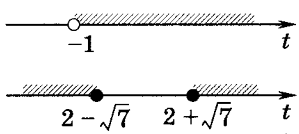


Рис. 274

$$\left[\begin{array}{l} -1 < t \leqslant 2 - \sqrt{7}, \\ t \geqslant 2 + \sqrt{7}. \end{array}\right.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} -2 < x \leqslant 1 - \sqrt{7}, \\ x \geqslant 1 + \sqrt{7} \text{ (рис. 275).} \end{array}\right.$$

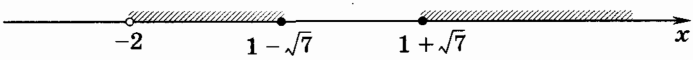


Рис. 275

Теперь рассмотрим случай б).

б) Рис. 276.

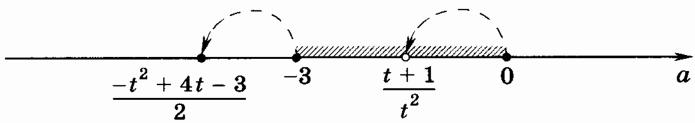


Рис. 276

Достаточно решить систему неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{-t^2 + 4t - 3}{2} \leqslant -3, \\ t \leqslant -1, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} t^2 - 4t - 3 \geqslant 0, \\ t \leqslant -1. \end{array}\right.$$

$x + 1 \leqslant -1,\ x \leqslant -2.$

Теперь решаем систему (2). После несложных преобразований перейдем к системе:

$$\left\{\begin{array}{l} at^2 \geqslant t + 1, \\ a^2t^4 - a(2t^3 + 2t^2 + 1) + 0{,}5t^2 + 4t - 0{,}5 < 0. \end{array}\right.$$

1) Если $t = 0$, то решений нет.

2) Пусть $t \neq 0$. Опять рассматриваем два случая: в) и г).

в) Рис. 277.

Введем функцию

$f(a) = a^2t^4 - a(2t^3 + 2t^2 + 1) + 0{,}5t^2 + 0{,}4t - 0{,}5.$

Составляем систему: $\begin{cases} f(-3) < 0, \\ f(0) < 0, \\ (t+1)/t^2 < -3. \end{cases}$

Легко видеть, что неравенство $3t^2 + t + 1 < 0$ не имеет решений. Значит, случай в) невозможен.

г) Рис. 278.

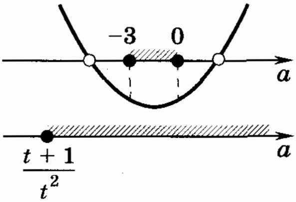


Рис. 277

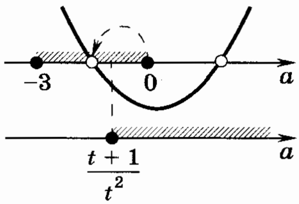


Рис. 278

Получим систему неравенств $\begin{cases} f(0) < 0, \\ -3 < (t+1)/t^2 \leqslant 0, \\ f\left(\dfrac{t+1}{t^2}\right) \leqslant 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 0{,}5t^2 + 4t - 0{,}5 < 0, \\ -3t^2 + t + 1 > 0, \\ t \leqslant -1, \\ \dfrac{(t+1)^2}{t^4} \cdot t^4 - \dfrac{(t+1)(2t^3 + 2t^2 + 1)}{t^2} + \dfrac{t^2 + 8t - 1}{2} \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 + 8t - 1 < 0, \\ t \leqslant -1, \\ t^4 - 4t^3 + 3t^2 + 2t + 2 \geqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} t^2 + 8t - 1 < 0, \\ t \leqslant -1, \\ t^3(t-4) + 3t^2 + 2t + 2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $t^3(t - 4) > 0$ и $3t^2 + 2t + 2 > 0$ при $t \leqslant -1$, достаточно решить систему

$$\begin{cases} t^2 + 8t - 1 < 0, \\ t \leqslant -1 \text{ (рис. 279).} \end{cases}$$

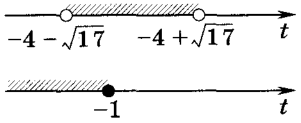


Рис. 279

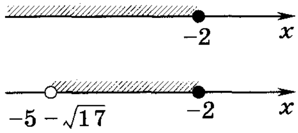


Рис. 280

$-4-\sqrt{17} < t \leqslant -1,$

$-5-\sqrt{17} < x \leqslant -2.$

А теперь найдем пересечение множеств решений в случаях б) и г), когда $t \leqslant -1$.

В случае б) $a \in \left[-3; \dfrac{t+1}{t^2}\right)$, а в случае г) $a \in \left[\dfrac{t+1}{t^2}; 0\right]$, т. е. $a \in [-3; 0]$.

$-5-\sqrt{17} < x \leqslant -2$ (рис. 280).

Учитывая результат решения в случае а), получаем ответ.

Ответ: $(-5-\sqrt{17}; 1-\sqrt{7}] \cup [1+\sqrt{7}; +\infty)$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решите неравенства (1—8).

1) $\sqrt{x^2+1} \leqslant a-1.$

2) $\sqrt{x-3} > a+1.$

3) $a\sqrt{x-1} < 2.$

4) $\sqrt{x-3} \geqslant \sqrt{x+2a}.$

5) $\sqrt{ax+2} < \sqrt{2x+a}.$

6) $\sqrt{a^2-x^2} < x/2.$

7) $\sqrt{x^2+cx-5} \leqslant \sqrt{x-5}.$

8) $\dfrac{a}{\sqrt{x}+1} \geqslant \dfrac{a}{\sqrt{x}}.$

9) Решите неравенство $\sqrt{1-x^2} < a-x$ графически.

10) При каких значениях $a < 0$ решения неравенства $\sqrt{x+a} \geqslant x$ образуют на числовой прямой отрезок длиной $2|a|$?

11) Решите неравенство $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} > a$.

12) Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\cos 2x + a \leqslant 2\sqrt{x^2+16} - \dfrac{x^2+16}{a+\cos 2x}$ имеет единственное решение.

13) При каких значениях a и b множество решений неравенства $\sqrt{x-a} > \sqrt{2x-b}$ совпадает с промежутком $[1; 5)$?

14) При каких значениях параметра p множество решений неравенства $x + \sqrt{x^2 - 2px} > 1$ содержит промежуток $[1/4; 1]$?

15) Решите неравенство $\sqrt{5x^2+m^2} \geqslant -3x$.

16) Для каждого положительного a решите неравенство $\sqrt{2ax - x^2} > a - x$.

17) Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} \sqrt{|y+3|} = 1 - \sqrt{5|x|}, \\ 16a - 9 - 6y = 25x^2 + y^2 \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

18) При каких значениях параметра b неравенство $(b - x)\sqrt{3 + x - x^2} \geqslant 0$ имеет только два решения? Найдите эти решения.

19) При каких значениях a все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие неравенству

$y > 5(x-a)^2 - \sqrt{9-a^2}$, одновременно удовлетворяют и неравенству $y > x^2 - 3$?

20) Найдите наименьшее значение величины a, при котором неравенство

$$\sqrt{a} \cdot (20x - 5x^2 - 20) + \frac{1}{\sqrt{a^3} \cdot (20x - 5x^2 - 20)} \geqslant$$

$$\geqslant -10\sqrt{a}\,|\cos 5\pi x|$$ имеет хотя бы одно решение.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

1. Справочный материал

1.1. Показательная функция. Свойства показательной функции

▶ ***Определение.*** Функция, заданная формулой $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется *показательной* функцией с основанием a.

Она определена на всей числовой оси. Поясним, почему на основание a накладываются ограничения: $a > 0$, $a \neq 1$.

Если взять, например, $a = -2$, то по определению степени положительного числа a с рациональным показателем $r = m/n$, где $m \in \mathrm{Z}$, $n \in \mathrm{N}$, $n > 1$, записи $(-2)^{2/3}$, $(-2)^{1/2}$ и т. д. бессмысленны. Если $a = 0$, то x не может принимать ни одного неположительного значения.

Если же $a = 1$, то $y = 1$ при любом $x \in \mathrm{R}$, а потому $y = 1^x$ не представляет интереса.

Итак, основание показательной функции является положительным числом, не равным 1.

Построим схематично график функции $y = a^x$, где $a > 1$, и перечислим ее свойства (рис. 281).

1. Область определения $D(y) = \mathrm{R}$.

2. Множество значений $E(y) = (0; +\infty)$.

Остановимся на детализации области значений показательной функции при $a > 1$.

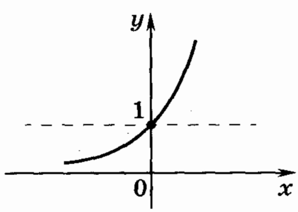


Рис. 281

1) Если $x > 0$, то $a^x > 1$.

2) Если $x = 0$, то $a^x = 1$.

3) Если $x < 0$, то $0 < a^x < 1$.

Обратим внимание на то, что при выполнении различных упражнений с показательной функцией недостаточно знать только, что $a^x > 0$. Важно уметь сравнивать a^x с единицей. Рассмотрим несколько примеров.

№ 1. Решите уравнение $3^{-x^2-x-1} = 5$.

Решение.

Учитывая, что $-x^2 - x - 1 < 0$ при $x \in \mathrm{R}$, а $0 < 3^{-x^2-x-1} < 1$, делаем вывод, что данное уравнение решений не имеет.

№ 2. Решите уравнение $2^{\sqrt{x^2-5x}} = \sqrt{1-|x|}$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} x^2 - 5x \geqslant 0, \\ 1 - |x| \geqslant 0 \end{cases}$ (рис. 282).

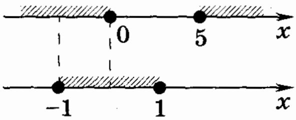


Рис. 282

Отсюда: $x \in [-1; 0]$.

Тогда в области определения уравнения справедливы неравенства: $1 \leqslant 2^{\sqrt{x^2-5x}} \leqslant 2^{\sqrt{6}}$; $0 \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1$.

Значит, решения данного уравнения надо искать среди решений системы $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 5x} = 0, \\ 1 + x = 1. \end{cases}$

Получим $x = 0$.

Ответ: 0.

№ 3. Решите неравенство $3^{x^2} > \cos x - 1/2$.

Решение.

ООН: R.

Учитывая, что $3^{x^2} \geqslant 1$ при $x \in \mathrm{R}$,

$-3/2 \leqslant \cos x - 1/2 \leqslant 1/2$, заключает, что данное неравенство верно при любом $x \in \mathrm{R}$.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Вернемся к свойствам функции $y = a^x$, где $a > 1$.

3. Функция $y = a^x$, где $a > 1$, не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений.

4. Возрастает на R.

Докажем последнее.

Пусть x_1 и x_2 — два произвольных числа из R таких, что $x_1 > x_2$. Докажем, что $a^{x_1} > a^{x_2}$. Рассмотрим $a^{x_1 - x_2}$: $x_1 - x_2 > 0$, $a > 1$. Поэтому $a^{x_1 - x_2} > 1$.

Значит, $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1$, $a^{x_1} > a^{x_2}$.

5. Функция не обладает свойствами четности и нечетности.

6. Не является периодической.

7. Дифференцируема на R: $(a^x)' = a^x \ln a$.

Теперь построим схематично график функции $y = a^x$, где $0 < a < 1$, и перечислим ее свойства (рис. 283).

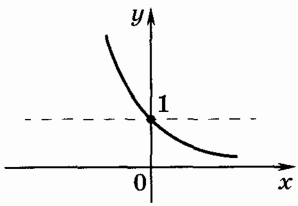


Рис. 283

1. $D(y) = R$.

2. $E(y) = (0; +\infty)$.

1) Если $x > 0$, то $0 < a^x < 1$.

2) Если $x = 0$, то $a^x = 1$.

3) Если $x < 0$, то $a^x > 1$.

3. Не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений.

4. Убывает на R.

5. Не является ни четной, ни нечетной.

6. Не является периодической.

7. $(a^x)' = a^x \ln a$.

1.2. Показательные уравнения и неравенства

При решении любых уравнений (неравенств) и их систем желательно пользоваться теорией равносильности, которая позволяет осознанно переходить от одного уравнения (неравенства) к другому. Существует несколько определений понятия «равносильность» применительно к уравнениям (неравенствам) или их системам и им соответствующих теорий.

Остановимся на одном из определений равносильности уравнений.

▶ ***Определение.*** Если всякий корень уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ (1), принадлежащий множеству M, является корнем уравнения $f_2(x) = g_2(x)$ (2), а любой корень уравнения (2), принадлежащий M, является корнем уравнения (1), то эти уравнения называются равносильными на множестве M.

Если оба уравнения не имеют корней на множестве M, то они тоже считаются равносильными на этом множестве.

Выбор множества M очень важен, так как два уравнения на одном множестве могут быть равносильны, а на другом нет.

Например, уравнения $(x - 1)(x^2 - 3) = 0$ и $x - 1 = 0$ равносильны на множестве N, но не равносильны на множестве R.

Приведем некоторые утверждения о равносильности уравнений (неравенств) на множестве применительно к показательным и логарифмическим уравнениям и неравенствам и приведем доказательства части из них.

Теорема 1. Уравнение $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$ (1), равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$ (2) в области определения уравнения (1).

Доказательство.

Заметим, что области определений уравнений (1) и (2) совпадают: это пересечение областей определения функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$.

1) Пусть x_1 — корень уравнения (1). Это значит, что $a^{f(x_1)} = a^{\varphi(x_1)}$ — верное числовое равенство. Докажем теперь, что x_1 — корень уравнения (2), т. е.

$f(x_1) = \varphi(x_1)$. Воспользуемся методом от противного. Пусть $f(x_1) \neq \varphi(x_1)$. Тогда либо $f(x_1) > \varphi(x_1)$, либо $f(x_1) < \varphi(x_1)$. Допустим, что $f(x_1) > \varphi(x_1)$. Тогда $a^{f(x_1)} > a^{\varphi(x_1)}$, если $a > 1$, или $a^{f(x_1)} < a^{\varphi(x_1)}$, если $0 < a < 1$. Получим противоречие с тем, что x_1 — корень уравнения (1). Аналогично можно доказать, что неверно неравенство $f(x_1) < \varphi(x_1)$. Остается, что $f(x_1) = \varphi(x_1)$.

2) Пусть x_2 — корень уравнения (2). Тогда $f(x_2) = \varphi(x_2)$. Справедливость равенства $a^{f(x_2)} = a^{\varphi(x_2)}$ доказывается методом от противного.

3) Если одно из уравнений (1) или (2) не имеет корней, то не имеет их и другое.

Пусть, например, уравнение (1) не имеет корней. Предположим при этом, что уравнение (2) имеет корень $x = x_0$. Тогда по пункту 2 доказательства теоремы число x_0 — корень и уравнения (1), а оно корней не имеет. Аналогично доказывается, что если уравнение (2) не имеет корней, то не имеет их и уравнение (1).

Теорема 2. Неравенство $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, в своей области определения равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > \varphi(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < \varphi(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 3. Неравенство $a^{f(x)} \geqslant a^{\varphi(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, в своей области определения равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ f(x) \geqslant \varphi(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) \leqslant \varphi(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Попробуйте эти теоремы доказать самостоятельно, а также сформулировать ***теоремы 4*** и ***5*** для неравенств $a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, и $a^{f(x)} \leqslant a^{\varphi(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

▶ ***Определение.*** Областью определения функции $y = f(x)^{g(x)}$ договоримся считать все те значения x, при которых $f(x) > 0$ и $g(x)$ существует.

Теорема 6. Уравнение $f(x)^{g(x)} = f(x)^{\varphi(x)}$ в своей области определения равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} g(x) = \varphi(x), \\ f(x) = 1. \end{array}\right.$

Теорема 7. Неравенство $f(x)^{g(x)} > f(x)^{\varphi(x)}$ равносильно в своей области определения совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > \varphi(x), \\ f(x) > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < \varphi(x), \\ 0 < f(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 8. Неравенство $f(x)^{g(x)} \geqslant f(x)^{\varphi(x)}$ равносильно в своей области определения совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) \geqslant \varphi(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) \leqslant \varphi(x), \end{cases} \\ f(x) = 1. \end{array}\right.$$

Сформулируйте ***теоремы 9*** и ***10*** для неравенств $f(x)^{g(x)} < f(x)^{\varphi(x)}$ и $f(x)^{g(x)} \leqslant f(x)^{\varphi(x)}$, а также попробуйте доказать самостоятельно ***теоремы 6—10.***

1.3. Логарифм числа. Свойства логарифмов

Если $a > 0$, $a \neq 1$, то для любого $b > 0$ существует число x (и притом только одно) такое, что $a^x = b$. Это число x называется логарифмом числа b при основании a и обозначается так: $x = \log_a b$.

log — начальные буквы слова логарифм, написанного латинскими буквами: logarithmus.

▶ ***Определение.*** Логарифм положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) есть показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b: $a^{\log_a b} = b$.

❑ Примеры: $\log_2 8 = 3$; $\log_5 25 = 2$; $\log_3 1/3 = -1$; $\log_8 1 = 0$.

В соответствии с десятичным характером счета наиболее употребляемы *десятичные* логарифмы, обозначаемые $\lg b$.

Большое значение имеют также *натуральные* логарифмы, основанием которых служит трансцендентное число $e = 2{,}71828\ldots$ Их обозначают $\ln b$.

Формулы перехода от натуральных логарифмов к десятичным и обратно: $\ln b = \dfrac{\lg b}{\lg e}$, $\lg b = \dfrac{\ln b}{\ln 10}$, $\dfrac{1}{\lg e} = 2{,}30258\ldots$, $\dfrac{1}{\ln 10} = 0{,}43429\ldots$.

Свойства логарифмов

1. $a^{\log_a x} = x$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Это равенство называют *основным логарифмическим тождеством.*
2. $\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$, где $xy > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3. $\log_a (x/y) = \log_a |x| - \log_a |y|$, где $x/y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.
4. $\log_a x^n = n \cdot \log_a |x|$, где $x^n > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathrm{R}$.
5. $\log_{a^k} x = (1/k) \log_{|a|} x$, где $x > 0$, $k \in \mathrm{R}$, $k \neq 0$, $a^k > 0$, $a^k \neq 1$.

Следствия.

1) $\log_{a^k} x^n = (n/k) \log_{|a|} |x|$, где $x^n > 0$, $a^k > 0$, $a^k \neq 1$, $k \in \mathrm{R}$, $k \neq 0$, $n \in \mathrm{R}$.

2) $\log_a x = \log_{a^n} x^n$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathrm{R}$, $n \neq 0$.

3) $\log_{a^n} x^n = \log_{|a|} |x|$, где $x^n > 0$, $a^n > 0$, $a^n \neq 1$, $n \in \mathrm{R}$, $n \neq 0$.

6. $\log_a M = \log_b M(1/\log_b a)$, где $M > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Эта формула носит название *формулы перехода к новому основанию*, а дробь $(1/\log_b a)$ называется *модулем перехода*.

Следствие: $\log_a b = 1/\log_b a$, где $b > 0$, $b \neq 1$, $a > 0$, $a \neq 1$.

7. $a^{k\log_b c} = c^{k\log_b a}$, где $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$; $c > 0$, $k \in \mathrm{R}$.

Докажем это свойство.

Левая и правая части равенства — положительные числа. Прологарифмируем их по основанию b: $k\log_b c \cdot \log_b a = k\log_b a \cdot \log_b c$. Получим верное равенство. Значит, и данное равенство верно.

8. $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $\log_b a > 0$.

Доказательство.

Прологарифмируем обе части равенства по основанию b: $\sqrt{\log_a b} \cdot \log_b a = \sqrt{\log_b a}$. Возведем в квадрат: $\log_a b \cdot \log_b^2 a = \log_b a$. Откуда $\log_a b \cdot \log_b a = 1$. Последнее равенство верно.

❑ Пример. Вычислите $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

Решение.

Учитывая, что $3^{\sqrt{\log_3 2}} = 2^{\sqrt{\log_2 3}}$, заключаем, что $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}} = 0$.

9. $1 = \log_a a$; $0 = \log_a 1$; $r = \log_a a^r$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $r \in \mathrm{R}$.

Рассмотрим несколько примеров на применение перечисленных свойств.

№ 1. Вычислите:

а) $4^{\log_8 27} = 4^{\log_2 3} = 3^{\log_2 4} = 9.$

б) $0{,}8(1 + 9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5} = 0{,}8(1 + 8^{\log_3 9})^{\log_{65} 5} =$
$= 0{,}8(1 + 64)^{\log_{65} 5} = 4.$

в) $\lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 4^\circ + \lg \operatorname{ctg} 2^\circ + \lg \operatorname{ctg} 4^\circ = (\lg \operatorname{tg} 2^\circ +$
$+ \lg \operatorname{ctg} 2^\circ) + (\lg \operatorname{tg} 4^\circ + \lg \operatorname{ctg} 4^\circ) = 0.$

№ 2. Найдите $\log_{1/2} 28$, если $\log_7 2 = a$.

Решение.

$\log_{1/2} 28 = -\log_2 28 = -\log_7 28/\log_7 2 =$
$= -(2 \log_7 2 + 1)/\log_7 2 = -(2a + 1)/a.$

№ 3. Докажите, что

$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = 1/3.$

Решение.

Перейдем в логарифмах к основанию 2:

$$\frac{1}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3}{2} \cdot \frac{2}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 6} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 7}{3} = 1/3.$$

Данное равенство верно.

1.4. Логарифмическая функция и ее свойства

▶ ***Определение.*** *Логарифмической* функцией называется функция, заданная формулой $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Построим схематично график логарифмической функции $y = \log_a x$, где $a > 1$ (рис. 284) и $y = \log_a x$, где $0 < a < 1$ (рис. 285).

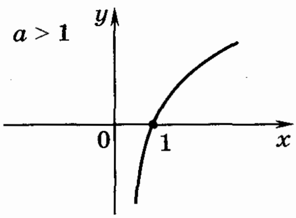


Рис. 284

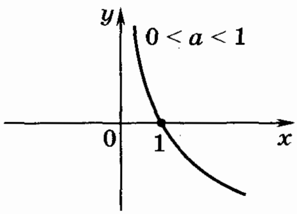


Рис. 285

Свойства:

1. $D(y) = (0; +\infty)$.
2. $E(y) = R$.
Детализация области значений.

$a > 1$	$0 < a < 1$
1) Если $x > 1$, то $y > 0$.	1) Если $x > 1$, то $y < 0$.
2) Если $x = 1$, то $y = 0$.	2) Если $x = 1$, то $y = 0$.
3) Если $0 < x < 1$, то $y < 0$.	3) Если $0 < x < 1$, то $y > 0$.

3. Не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений.
4. Если $a > 1$, то функция возрастает на $(0; +\infty)$.
Если $0 < a < 1$, то функция убывает на $(0; +\infty)$.
5. Не обладает свойствами четности и нечетности.
6. Не является периодической.
7. $\log_a' x = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Рассмотрим несколько примеров.

№ 1. Найдите область определения функции.

а) $y = \lg(-x - 1)$.

Ответ: $D(y) = (-\infty; -1)$.

б) $y = \log_2 |x - 2|$.

Ответ: $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

в) $y = \sqrt{\lg \sin x}$.

Решение.
$\lg \sin x \geqslant 0$, $\sin x \geqslant 1$, $\sin x = 1$, $x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$.

г) $y = \lg(1 - \cos x)$.

Ответ: $x \neq 2\pi n$, $n \in Z$.

д) $y = \lg(\arcsin x)$.

Решение.

$0 < \arcsin x \leqslant \pi/2$, $0 < x \leqslant 1$.

Ответ: $D(y) = (0; 1]$.

№ 2. Решите уравнение $\log_3(x^2 + 1) = -x^2$.

Решение.

ООУ: $x \in \mathrm{R}$.

В области определения верно неравенство $x^2 + 1 \geqslant 1$. Значит, $\log_3(x^2 + 1) \geqslant 0$. Правая же часть уравнения является числом неположительным: $-x^2 \leqslant 0$. Поэтому данное уравнение имеет только один корень $x = 0$.

Ответ: 0.

1.5. Логарифмические уравнения и неравенства

Теоремы равносильности

Теорема 11. Уравнение $\log_a f(x) = b$ (1), где $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in R$ в своей области определения равносильно уравнению $f(x) = a^b$ (2).

Доказательство.

Пусть M — область определения уравнения (1). M является множеством решений неравенства $f(x) > 0$.

Пусть x_1 — корень уравнения (1): $\log_a f(x_1) = b$. По определению логарифма $a^b = f(x_1)$, а это означает, что x_1 — корень уравнения (2).

Пусть теперь x_2 — корень уравнения (2): $f(x_2) = a^b$. Заметим, что $a^b > 0$, а потому $f(x_2) > 0$. Значит, $x_2 \in M$. И опять по определению логарифма имеем, что $b = \log_a f(x_2)$. Поэтому x_2 — корень уравнения (1).

Если одно из уравнений (1) и (2) не имеет решений, то не имеет их и другое.

Докажите это самостоятельно методом от противного.

Теорема 12. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$ (3), где $a > 0$, $a \neq 1$, в своей области определения равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$ (4).

Доказательство.

Пусть M — область определения уравнения (3). Она совпадает с множеством решений системы неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0. \end{cases}$

Пусть x_1 — корень уравнения (3):

$\log_a f(x_1) = \log_a \varphi(x_1)$. Докажем, что $f(x_1) = \varphi(x_1)$.

(Метод от противного.)

Пусть $f(x_1) \neq \varphi(x_1)$. Тогда: 1) $f(x_1) > \varphi(x_1)$ или 2) $f(x_1) < \varphi(x_1)$.

В случае 1): $\log_a f(x_1) > \log_a \varphi(x_1)$, если $a > 1$, или $\log_a f(x_1) < \log_a \varphi(x_1)$, если $0 < a < 1$, что противоречит тому, что x_1 — корень уравнения (3).

Аналогично доказывается, что неравенство $f(x_1) < \varphi(x_1)$ неверно.

Поэтому $f(x_1) = \varphi(x_1)$, т. е. x_1 — корень уравнения (4).

Пусть теперь x_2 — корень уравнения (4), причем $x_2 \in M$: $f(x_2) = \varphi(x_2)$. Так как $x_2 \in M$, то $f(x_2) > 0$ и $\varphi(x_2) > 0$. Методом от противного легко можно доказать, что $\log_a f(x_2) = \log_a \varphi(x_2)$, т. е. x_2 — корень уравнения (3).

Если одно из уравнений ((3) или (4)) не имеет решений, то не имеет их и другое.

Замечание. Обратим внимание на существенность условия, что оба уравнения рассматриваются в области определения уравнения (3).

Если решать каждое из уравнений в своей области определения, то уравнение (4) является следствием уравнения (3), т. е. содержит все его корни.

Рассмотрим несколько примеров.

№ 1. Уравнения $\log_2(2x - 1) = \log_2(x + 1)$ (1) и $2x - 1 = x + 1$ (2) равносильны на множестве $M = (1/2; +\infty)$. Они имеют один корень $x = 2$.

Эти уравнения будут равносильны, если их решить каждое в своей области определения.

№ 2. Уравнения $\log_3(2x - 1) = \log_3(x - 2)$ (1) и $2x - 1 = x - 2$ (2) равносильны на множестве $M = (2; +\infty)$, так как оба корней не имеют.

Если же каждое из этих уравнений решать в своей области определения, то они не будут равносильны: уравнение (1) корней не имеет, а уравнение (2) имеет корень $x = -1$.

№ 3. Уравнения $\lg(x^2 - 6) = \lg(-x)$ (1) и

$x^2 - 6 = -x$ (2)

равносильны на множестве $M = (-\infty; -\sqrt{6})$. У них только один корень $x = -3$.

Если же решать каждое из них в своей области определения, то они не равносильны: уравнение (1) имеет корень $x = -3$, а уравнение (2) — два корня: $x = -3$; $x = 2$.

№ 4. Уравнения $\lg x^2 = \lg(6 - x)$ (1) и $x^2 = 6 - x$ (2) равносильны на множестве $M = (-\infty; 0) \cup (0; 6)$: $x_1 = -3$; $x_2 = 2$. Данные уравнения окажутся равносильными и будучи решенными каждое в своей области определения.

№ 5. Решите уравнение $\lg(x^2 - 8) = \lg(-2x)$.

<u>Решение</u>.

<u>1 способ</u>.

ООУ: $\begin{cases} x^2 - 8 > 0, \\ x < 0, \end{cases}$ $x < -2\sqrt{2}$. $M = (-\infty; -2\sqrt{2})$.

Переходим к уравнению $x^2 - 8 = -2x$; $x^2 + 2x - 8 = 0$, $\left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 2. \end{array}\right.$ Теперь надо проверить, входят ли найденные значения x в область определения данного уравнения.

<u>Ответ</u>: -4.

<u>2 способ</u>. Сразу переходим к уравнению-следствию $x^2 - 8x = -2x$ и решаем его: $\left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 2. \end{array}\right.$

Необходима проверка путем подстановки найденных значений x в данное уравнение.

<u>Ответ</u>: -4.

<u>3 способ</u>. Этот способ мало чем отличается от 1 способа, являясь по сути своей просто более компактным оформлением того же решения.

Переходим от данного уравнения к системе, равносильной ему в области его определения:

$$\begin{cases} x^2 - 8 = -2x, \\ x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 2, \end{array}\right. \\ x < 0. \end{cases} \quad x = -4.$$

<u>Ответ</u>: -4.

Такое оформление решения, на наш взгляд, удобнее. Кроме того, в более трудных уравнениях необязательно находить область определения в явном виде. Достаточно только записать систему неравенств (или одно неравенство), задающую область определения. Можно и теорему 12 сформулировать иначе.

Теорема 12а. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно в своей области определения каждой из систем $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ \varphi(x) > 0. \end{cases}$

Теорема 13. Уравнение $\log_{f(x)} \varphi(x) = \log_{f(x)} \psi(x)$ в своей области определения равносильно уравнению $\varphi(x) = \psi(x)$.

Теорема 13а. Уравнение $\log_{f(x)} \varphi(x) = \log_{f(x)} \psi(x)$ в своей области определения равносильно каждой из систем $\begin{cases} \varphi(x) = \psi(x), \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) > 0, f(x) \neq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \varphi(x) = \psi(x), \\ \psi(x) > 0, \\ f(x) > 0, f(x) \neq 1. \end{cases}$

Теорема 14. Неравенство $\log_a f(x) > b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, в своей области определения равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a > 1, \\ f(x) > a^b; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < a^b. \end{cases}\end{array}\right.$$

Теорема 14а. Неравенство $\log_a f(x) > b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно в своей области определения совокупности систем $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a > 1, \\ f(x) > a^b; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < f(x) < a^b. \end{cases}\end{array}\right.$

Теорема 15. Неравенство $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно в своей области определения совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a > 1, \\ f(x) > \varphi(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < \varphi(x). \end{cases}\end{array}\right.$$

Теорема 15а. Неравенство $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно в своей области определения совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a > 1, \\ f(x) > \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < \varphi(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

Сформулируйте самостоятельно ***теоремы 16, 17, 18*** для неравенств $\log_a f(x) \geqslant \log_a \varphi(x)$; $\log_a f(x) < < \log_a \varphi(x)$; $\log_a f(x) \leqslant \log_a \varphi(x)$.

Теорема 19. Неравенство $\log_{f(x)} \varphi(x) > \log_{f(x)} \psi(x)$ равносильно в своей области определения совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) > \psi(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) < \psi(x). \end{cases}\end{array}\right.$$

Теорема 19а. Неравенство $\log_{f(x)} \varphi(x) > \log_{f(x)} \psi(x)$ равносильно в своей области определения совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) > \psi(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ 0 < \varphi(x) < \psi(x). \end{cases}\end{array}\right.$$

❑ Примеры.

№ 6. Решите уравнения

а) $\lg(x + 3/2) = \lg(1/x)$.

Решение.

Переходим к системе, равносильной данному уравнению в области его определения:

$$\begin{cases} x + 3/2 = 1/x, \\ x > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 + 3x - 2 = 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1/2, \\ x = -2, \end{array}\right. \\ x > 0; \end{cases} \qquad x = 1/2.$$

Ответ: 1/2.

б) $\log_2(6 - x) = 2\log_2 x$.

Решение.

Найдем ООУ:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 6 - x > 0, \end{cases}$$

$0 < x < 6$ (рис. 286).

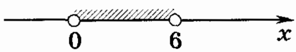


Рис. 286

А теперь перейдем к уравнению-следствию

$6 - x = x^2$:

$x^2 + x - 6 = 0, \qquad \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 2. \end{array}\right.$

Области определения принадлежит только $x = 2$.

Ответ: 2.

№ 7. Решите уравнение $\lg(x + 1{,}5) + \lg x = 0$.

Решение.

ООУ: $x > 0$.

1 способ.

Переходим к уравнению-следствию

$\lg(x^2 + 1{,}5x) = 0$:

$x^2 + 3x/2 = 1, \quad 2x^2 + 3x - 2 = 0, \quad \left[\begin{array}{l} x = 1/2, \\ x = -2. \end{array}\right.$

В область определения данного уравнения входит только число 1/2.

Ответ: 1/2.

2 способ. Данное уравнение в области его определения равносильно системе

$\begin{cases} x > 0, \\ \lg(x(x + 1{,}5)) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0, \\ 2x^2 + 3x - 2 = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1/2, \\ x = -2, \end{array}\right. \end{cases} \qquad x = 1/2.$

№ 8. Решите неравенства:

а) $\log_5(3x - 1) < 1$.

Решение.

Данное неравенство равносильно в своей области определения системе неравенств $\begin{cases} 3x - 1 > 0, \\ 3x - 1 < 5, \end{cases}$

$\begin{cases} x > 1/3, \\ x < 2. \end{cases}$

Ответ: $(1/3; 2)$.

б) $\log_{1/2}(x^2-5x+6) > -1$.

Решение.

Рассмотрим систему, равносильную данному неравенству в области его определения:

$$\begin{cases} x^2-5x+6>0, \\ x^2-5x+6<2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5x+6>0, \\ x^2-5x+4<0 \text{ (рис. 287)}. \end{cases}$$

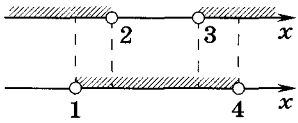


Рис. 287

Ответ: $(1; 2) \cup (3; 4)$.

в) $\log_4(3x-1) < \log_4(2x+3)$.

Решение.

Решаем систему неравенств, равносильную данному неравенству в его области определения:

$$\begin{cases} 3x-1<2x+3, \\ 3x-1>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<4, \\ x>1/3. \end{cases}$$

Ответ: $(1/3; 4)$.

г) $\log_x(x^2-x) > 1$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} x>0,\ x\neq 1, \\ x^2-x>0 \text{ (рис. 288)}; \end{cases}$ $x>1$.

Рассмотрим неравенство-следствие $x^2 - x > x$: $x(x-2) > 0$ (рис. 289).

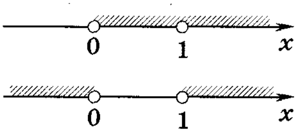


Рис. 288

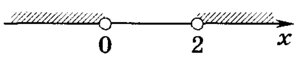


Рис. 289

Учтем ООН; получим $x > 2$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

2. Показательные уравнения с параметром

2.1. Подготовительные уравнения

№ 1. Решите уравнение $2^x = -a^2 - 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Заметим, что $-a^2 - 1$ является отрицательным числом при любом значении $a \in R$. Поэтому данное уравнение решений не имеет.

№ 2. Решите уравнение $3^{1-x} = -a^2$.

Ответ: *решений нет при любом действительном значении* a.

№ 3. Решите уравнение $10^x = a^{1/3} - \sqrt[3]{a}$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ x \in R. \end{cases}$

Если $a < 0$, то уравнение не имеет решений, так как не определено. Если же $a \geqslant 0$, то $a^{1/3} - \sqrt[3]{a} = 0$. Уравнение $10^x = 0$ тоже не имеет решений.

Ответ: решений нет при любом значении $a \in R$.

№ 4. Решите уравнение $3^{-x^2-1} = (b-1)^2 + 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Учтем, что $0 < 3^{-x^2-1} \leqslant 1$ при любом $x \in R$, а $(b-1)^2 + 1 \geqslant 1$ при любом $b \in R$. Достаточно решить уравнение при $b = 1$, т. е. $3^{-x^2-1} = 1$. Оно решений не имеет.

Ответ: решений нет при любом значении $b \in R$.

№ 5. Решите уравнение $2^{|x|} = 1 - b^2$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Учитывая, что $2^{|x|} \geqslant 1$, заключаем, что данное уравнение имеет решения, если $1 - b^2 \geqslant 1$, т. е. $b = 0$. Тогда $2^{|x|} = 1$, а значит, $x = 0$.

Ответ: 1) Если $b = 0$, то $x = 0$.
2) Если $b \neq 0$, то решений нет.

№ 6. Решите уравнение $3^{|x|} = c^2 - 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} c \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Рассмотрим ряд случаев:

1) $c^2 - 1 < 1$: $|c| < \sqrt{2}$. В этом случае решений нет.

2) $|c| = \sqrt{2}$: $3^{|x|} = 1$, $x = 0$.

3) $c^2 - 1 > 1$: $|c| > \sqrt{2}$. Тогда $|x| = \log_3(c^2 - 1)$,

$x_{1,2} = \pm\log_3(c^2 - 1)$.

Ответ: 1) Если $|c| < \sqrt{2}$, то решений нет.
2) Если $c = \pm\sqrt{2}$, то $x = 0$.
3) Если $|c| > \sqrt{2}$, то $x_{1,2} = \pm\log_3(c^2 - 1)$.

№ 7. Решите уравнение $e^{-x^2} = |\sin c - 1/2| + 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} c \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Если $\sin c - 1/2 = 0$, т. е. $c = (-1)^k\ \pi/6 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то данное уравнение примет вид $e^{-x^2} = 1$, откуда $x = 0$. Если $\sin c \neq 1/2$, то решений нет.

Ответ: 1) Если $c = (-1)^k\ \pi/6 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $x = 0$.
2) В остальных случаях решений нет.

№ 8. Решите уравнение $2^{x^2} = 1 - |\sin a|$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

В области определения уравнения верны неравенства $2^{x^2} \geqslant 1$ и $0 \leqslant |\sin a| \leqslant 1$. Поэтому данное уравнение может иметь решения только при условии $a = \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$. Тогда $x = 0$. Если $\sin a \neq 0$, то решений нет.

Ответ: 1) Если $a = \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, то $x = 0$.
2) Если $a \neq \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, то решений нет.

№ 9. Решите уравнение $3^{\sqrt{x} + 1} = 1 - |\cos b|$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Заметим, что $3^{\sqrt{x} + 1} \geqslant 3$. Из того, что $0 \leqslant |\cos b| \leqslant 1$, следует, что $0 \leqslant 1 - |\cos b| \leqslant 1$. Поэтому данное уравнение решений не имеет при $b \in \mathrm{R}$.

Ответ: решений нет при любом значении $b \in \mathrm{R}$.

№ 10. Решите уравнение $(1/5)^{|x|} = (b + 1)^2 + 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Учитывая, что $0 < (1/5)^{|x|} \leqslant 1$, $(b + 1)^2 + 1 \geqslant 1$, заключаем, что данное уравнение может иметь решения только при $b = -1$: $(1/5)^{|x|} = 1$, $x = 0$.

Ответ: 1) Если $b = -1$, то $x = 0$.
2) Если $b \neq -1$, то решений нет.

№ 11. Решите уравнение $(\sqrt{0{,}2}\,)^{|x - 2|} = c^2 + 2$.

Ответ: решений нет при любом значении $c \in \mathrm{R}$.

№ 12. Решите уравнение $10^{(2x-1)/x} = |a-2|/(a-2)$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \neq 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$

Если $a < 2$, то $|a-2|/(a-2) = -1$, а потому данное уравнение решений не имеет. Если $a > 2$, то уравнение $10^{(2x-1)/x} = 1$ имеет корень $x = 1/2$.

Ответ: 1) Если $a \leqslant 2$, то решений нет.
2) Если $a > 2$, то $x = 1/2$.

№ 13. Решите уравнение $(a-1)(1/2)^{\sqrt{x}} = 0$.

Ответ: 1) Если $a = 1$, то $x \geqslant 0$.
2) Если $a \neq 1$, то решений нет.

№ 14. Решите уравнение $(b^2-1)10^{\arcsin x} = 0$.

Ответ: 1) Если $b = 1$ или $b = -1$, то $x \in [-1; 1]$.
2) Если $b \neq \pm 1$, то решений нет.

№ 15. Решите уравнение $b(3^x - 1/3) = 0$.

Ответ: 1) Если $b = 0$, то $x \in \mathrm{R}$.
2) Если $b \neq 0$, то $x = -1$.

№ 16. Решите уравнение $c(2^{\sqrt{x}} + c^2) = 0$.

Ответ: 1) Если $c = 0$, то $x \geqslant 0$.
2) Если $c \neq 0$, то решений нет.

№ 17. Решите уравнение $(0{,}3)^{|x-2|+1} = a^2 + 1$.

Ответ: решений нет при любом значении $a \in \mathrm{R}$.

№ 18. Решите уравнение $m((1/2)^x - |m|) = 0$.

Ответ: 1) Если $m = 0$, то $x \in \mathrm{R}$.
2) Если $m \neq 0$, то $x = \log_{1/2}|m|$.

№ 19. Решите уравнение $a4^x = a^3$.

Ответ: 1) Если $a = 0$, то $x \in \mathrm{R}$.
2) Если $a \neq 0$, то $x = \log_4 a^2$.

№ 20. Решите уравнение $b(2^x - b) = 0$.

Ответ: 1) Если $b = 0$, то $x \in \mathbb{R}$.
2) Если $b < 0$, то решений нет.
3) Если $b > 0$, то $x = \log_2 b$.

2.2. Простейшие показательные уравнения с параметром

№ 1. Решите уравнение $2^x = a$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Решим уравнение сначала аналитически, учитывая область значений показательной функции (рис. 290).

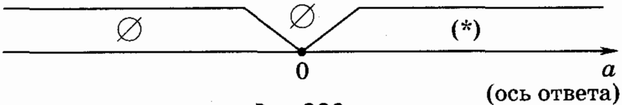


Рис. 290

1) Если $a \leqslant 0$, то решений нет.

2) Если $a > 0$, то $x = \log_2 a$. (*)

Данное уравнение легко решить и графически в системе координат (xOy). Строим график показательной функции $y = 2^x$ и часть семейства параллельных прямых $y = a$ (рис. 291).

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 292).

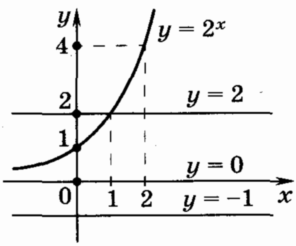


Рис. 291

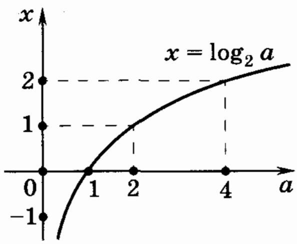


Рис. 292

Вопросы по рис. 292

1. Укажите корни уравнения $2^x = a$ при следующих значениях a: 1; 2; 4; 5; 1/2; 1/8.
2. При каком значении a уравнение имеет корнем число -2?
3. При каких значениях a уравнение имеет положительные (отрицательные) корни?

№ 2. Решите уравнение $(1/2)^x = a - 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Ответ: 1) Если $a \leqslant 1$, то решений нет (рис. 293).
2) Если $a > 1$, то

$$x = \log_{1/2}(a-1). \quad (*)$$

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 294).

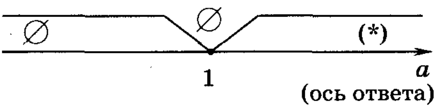


Рис. 293

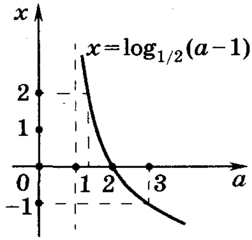


Рис. 294

№ 3. Решите уравнение $3^{x+1} = a^2$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Рассмотрим два случая.

1) $a = 0$. Уравнение примет вид $3^{x+1} = 0$. Оно решений не имеет.

2) $a \neq 0$. Тогда $a^2 > 0$, а потому $x + 1 = \log_3 a^2$. Откуда $x = -1 + 2\log_3 |a|$. (*)

Заполняем ось параметра (рис. 295).

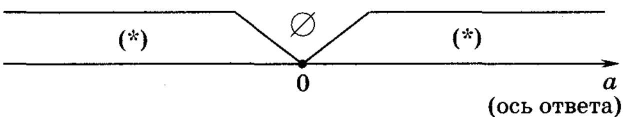


Рис. 295

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 296).

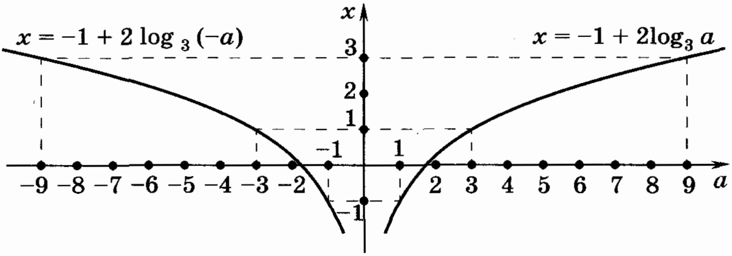


Рис. 296

Вопросы по рис. 296

1. Укажите корни уравнения для каждого из следующих значений a: -1; 1; -3; 3; 9; $-1/3$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.
2. При каких значениях a уравнение имеет корнем число 3?
3. При каких значениях a данное уравнение имеет положительные (отрицательные) корни?

№ 4. Решите уравнение $(1/5)^x = b(b+2)$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) Если $b \in [-2; 0]$, то $b(b+2) \leqslant 0$, а потому решений нет.

2) Если $b \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$, то

$$x = \log_{1/5}(b(b+2)). \qquad (*)$$

Заполняем ось ответа (рис. 297).

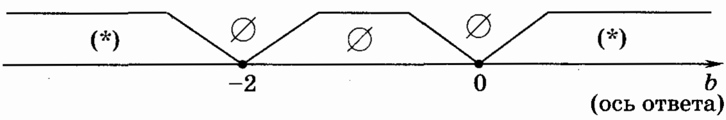


Рис. 297

Ответ: 1) Если $b \in [-2; 0]$, то решений нет.
2) Если $b \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$,
то $x = -\log_5(b(b+2))$.

№ 5. Решите уравнение $2^{x-3} = (1-a)/(a+1)$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \neq -1, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $a = 1$ или $a = -1$: решений нет.

2) $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$: решений нет, так как $(1-a)/(a+1) < 0$.

3) $a \in (-1; 1)$: $x = 3 + \log_2((1-a)/(a+1))$. (*)

Заполняем ось ответа (рис. 298).

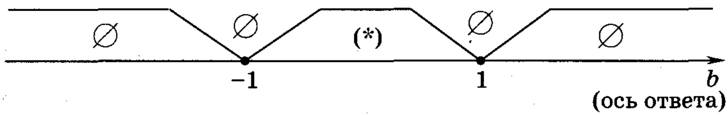


Рис. 298

Ответ: 1) Если $|a| \geqslant 1$, то решений нет.
2) Если $|a| < 1$,
то $x = 3 + \log_2((1-a)/(a+1))$.

№ 6. Решите уравнение $2^{1/(x-2)} = p$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} p \in \mathrm{R}, \\ x \neq 2. \end{cases}$

1) Если $p \leqslant 0$, то уравнение решений не имеет.

2) Если $p > 0$, то $1/(x-2) = \log_2 p$. Откуда

$x \log_2 p = 1 + 2\log_2 p$.

Решаем это линейное относительно x уравнение.

а) $\log_2 p = 0$, т. е. $p = 1$: $x \cdot 0 = 1$. Решений нет.

б) $p \neq 1$: $x = (1 + 2\log_2 p)/\log_2 p$. (*)

Исследование.

$$\begin{cases} x = (1 + 2\log_2 p)/\log_2 p, \\ (1 + 2\log_2 p)/\log_2 p \neq 2, \\ p \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (1 + 2\log_2 p)/\log_2 p, \\ p \neq 1. \end{cases}$$

Наносим результаты на ось параметра (рис. 299).

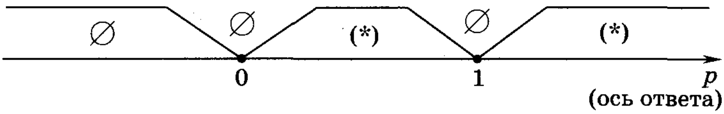


Рис. 299

<u>Ответ</u>: 1) Если $p \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$, то решений нет.
2) Если $p \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$,
то $x = (1 + 2\log_2 p)/\log_2 p$.

№ 7. Решите уравнение $2^{\sqrt{x+2}} = a - 1$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$

Заметим, что областью значений функции $y = 2^{\sqrt{x+2}}$ является множество $[1; +\infty)$. Поэтому, если $a - 1 < 1$, т. е. $a < 2$, то данное уравнение решений не имеет. Если $a = 2$, то $x = -2$. При $a > 2$ уравнение имеет корень

$$x = -2 + \log_2^2 (a - 1). \qquad (*)$$

Ответ списываем с оси ответа (рис. 300).

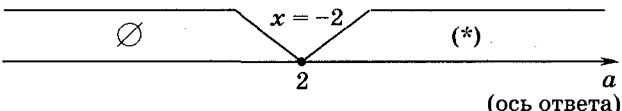


Рис. 300

№ 8. Решите уравнение $10^{x^2 - 2x} = m$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) Если $m \leqslant 0$, то решений нет.

2) Пусть $m > 0$, тогда решаем уравнение

$x^2 - 2x = \lg m$:

$x^2 - 2x - \lg m = 0, \quad D_1 = 1 + \lg m.$

а) $D_1 < 0$: $\lg m < -1$, $0 < m < 1/10$. Решений нет.

б) $D_1 = 0$: $m = 1/10$, $x_{1,2} = 1$.

в) $D_1 > 0$: $m > 1/10$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \lg m}$. (*)

Заполняем ось ответа (рис. 301).

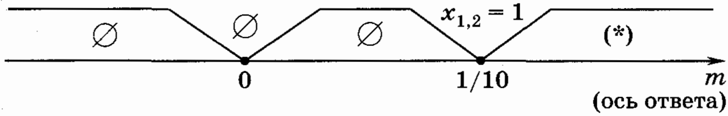


Рис. 301

<u>Ответ</u>: 1) Если $m \in (-\infty; 1/10)$, то решений нет.
2) Если $m = 1/10$, то $x = 1$.
3) Если $m > 1/10$, то $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \lg m}$.

№ 9. Решите уравнение $5^{|x|-1} = 1 - b$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} b \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

1) Если $b \geqslant 1$, то решений нет.

2) Пусть $b < 1$: $|x| - 1 = \log_5(1 - b)$,

$|x| = 1 + \log_5(1 - b)$.

а) $1 + \log_5(1 - b) < 0$: $\log_5(1 - b) < \log_5 1/5$, $0 < 1 - b < 1/5$, $4/5 < b < 1$.
Уравнение решений не имеет.

б) $b = 4/5$: $|x| = 0$, $x = 0$.

в) $b < 4/5$: $x = \pm(1 + \log_5(1 - b))$. (*)

Нанесем результаты на ось параметра (рис. 302).

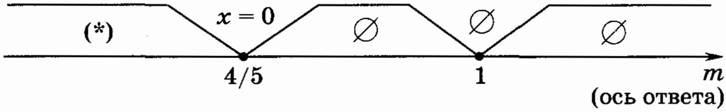


Рис. 302

<u>Ответ</u>: 1) Если $b \in (4/5; +\infty)$, то решений нет.
2) Если $b = 4/5$, то $x = 0$.
3) Если $b < 4/5$, то $x = \pm(1 + \log_5(1 - b))$.

№ 10. Решите уравнение $4^{-|x-2|} = c - 2$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} c \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

1) Пусть $c - 2 > 1$, т. е. $c > 3$. Данное уравнение решений не имеет.

2) Если $c - 2 \leqslant 0$, т. е. $c \leqslant 2$, то решений также нет.

3) Пусть $c = 3$: $4^{-|x-2|} = 1$, $x = 2$.

4) Пусть $2 < c < 3$. Решаем уравнение

$|x - 2| = -\log_4 (c - 2)$.

Если $c \in (2; 3)$, то $\log_4 (c - 2) < 0$, а потому $-\log_4 (c - 2) > 0$. И тогда $x - 2 = \pm\log_4 (c - 2)$;

$$\left[\begin{array}{l} x = 2 + \log_4 (c - 2), \\ x = 2 - \log_4 (c - 2). \end{array}\right. \qquad (*)$$

Ответ легко записать по рис. 303.

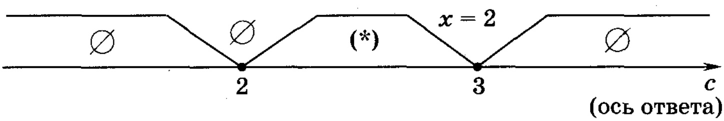


Рис. 303

№ 11. Решите уравнение $(1/2)^{x^2} = 2c - 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} c \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Учтем, что $0 < (1/2)^{x^2} \leqslant 1$, при $x \in \mathbb{R}$.

Поэтому, если $2c - 1 > 1$ или $2c - 1 \leqslant 0$, т. е. $c \in (-\infty; 1/2] \cup (1; +\infty)$, то решений нет.

Пусть $c = 1$: $(1/2)^{x^2} = 1$, $x_{1,2} = 0$.

Пусть теперь $c \in (1/2; 1)$:

$$x^2 = \log_{1/2} (2c - 1),\ x = \pm\sqrt{\log_{1/2} (2c - 1)}. \qquad (*)$$

Ответ запишите самостоятельно по рис. 304.

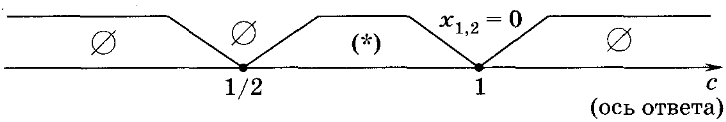


Рис. 304

Уравнения для самостоятельного решения

1) $(1/3)^{x-5} = b + 3$.
2) $3^{2x-1} = c - 3$.
3) $4^{x-1} = b^2 - 2b + 1$.
4) $(0,1)^x = (c-1)(c-2)$.
5) $(1/2)^{1-x} = \dfrac{a-2}{a+2}$.
6) $3^{\frac{2x-1}{x-2}} = m$.
7) $(1/2)^{\sqrt{x-3}} = b - 2$.
8) $e^{x^2+2x} = p$.
9) $(1/3)^{3-|x|} = m + 2$.
10) $(1/4)^{-|x+2|} = k + 1$.
11) $4^{x^2+1} = 2 - c$.
12) $3^{x^2} = 1 - |a|$.
13) $3^{x^2} = |a| - 1$.

* * *

№ 12. Решите уравнение $3^{ax} = 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Достаточно решить уравнение $ax = 0$ (рис. 305).

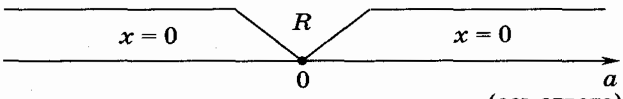


Рис. 305

Ответ: 1) Если $a = 0$, то $x \in R$.
2) Если $a \neq 0$, то $x = 0$.

№ 13. Решите уравнение $(1/3)^{a-x} = (1/3)^{3ax-2a}$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Данное уравнение равносильно уравнению

$a - x = 3ax - 2a$.

Представим его в виде: $x(3a + 1) = 3a$.

1) $a = -1/3$: $x \cdot 0 = -1$. Решений нет.

2) $a \neq -1/3$: $x = 3a/(3a + 1)$. (*)

Ответ запишите по рис. 306.

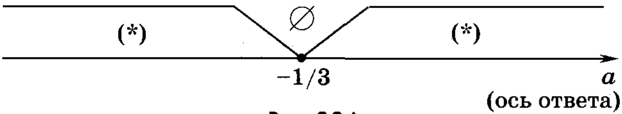


Рис. 306

№ 14. Решите уравнение $2^{\frac{a+3}{a+2}} \cdot 32^{\frac{1}{x(a+2)}} = 4^{1/x}$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \neq -2, \\ x \neq 0. \end{cases}$

$2^{\frac{a+3}{a+2}} \cdot 2^{\frac{5}{x(a+2)}} = 2^{\frac{2}{x}}, \quad 2^{\frac{a+3}{a+2} + \frac{5}{x(a+2)}} = 2^{\frac{2}{x}},$

$\dfrac{a+3}{a+2} + \dfrac{5}{x(a+2)} = 2/x, \quad ax + 3x + 5 = 2a + 4,$

$(a + 3)x = 2a - 1.$

1) Пусть $a = -3$: $0 \cdot x = -7$. Решений нет.

2) $a \neq -3, a \neq -2$: $x = \dfrac{2a-1}{a+3}$. (*)

Исследование.

1) $\begin{cases} x = (2a-1)/(a+3), \\ a \neq -2, a \neq -3, \\ (2a-1)/(a+3) \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = (2a-1)/(a+3), \\ a \neq -2, \\ a \neq -3, \\ a \neq 1/2. \end{cases}$

2) Если $a = 1/2$, то решений нет.

Ответ запишите самостоятельно по рис. 307.

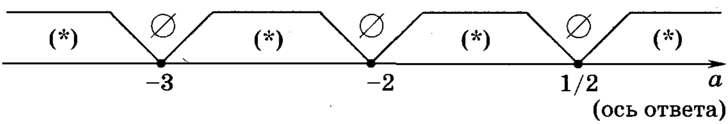


Рис. 307

№ 15. Решите уравнение $10/10^{3kx^2-2}=1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} k \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Данное уравнение сводится к ему равносильному $10^{3kx^2-2}=10$, а затем к уравнению $3kx^2-2=1$. Решаем уравнение $kx^2=1$.

1) Если $k \leqslant 0$, то решений нет.

2) Пусть $k>0$: $x^2=1/k$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{1/k}$. (*)

Заполняем ось ответа (рис. 308).

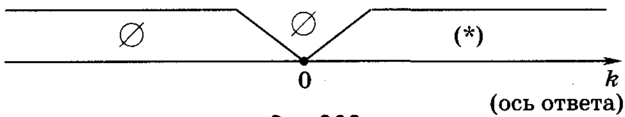


Рис. 308

Ответ: 1) Если $k \leqslant 0$, то действительных корней нет.

2) Если $k>0$, то $x_{1,2}=\pm\sqrt{1/k}$.

№ 16. Решите уравнение $2^{5bx^2+b}=4$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Исходное уравнение легко сводится к ему равносильному $5bx^2+b=2$. Откуда $5bx^2=2-b$.

1) Пусть $b=0$: $0 \cdot x^2=2$. Решений нет.

2) $b \neq 0$: $x^2=(2-b)/5b$.

а) $b=2$: $x^2=0$, $x_{1,2}=0$.

б) $(2-b)/5b<0$, т. е. $b \in (-\infty;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$. Решений нет.

в) $(2-b)/5b>0$, т. е. $b \in (0;\ 2)$:

$x_{1,2}=\pm\sqrt{(2-b)/5b}$. (*)

Ответ запишите сами по рис. 309.

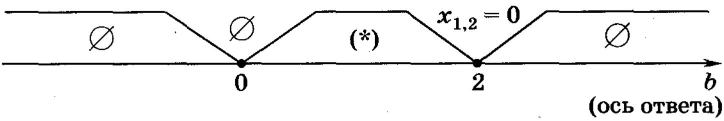


Рис. 309

№ 17. Решите уравнение $3^{\frac{x^2 - ax}{a-1}} = 1/3$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \neq 1, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Решаем уравнение $(x^2 - ax)/(a - 1) = -1$, приведя его к уравнению второй степени $x^2 - ax + a - 1 = 0$, у которого

$\mathrm{D} = (a - 2)^2$.

1) $\mathrm{D} = 0$, т. е. $a = 2$: $x_{1,2} = 1$.

2) $a \neq 1$, $a \neq 2$: $x_1 = 1$; $x_2 = a - 1$ (рис. 310).

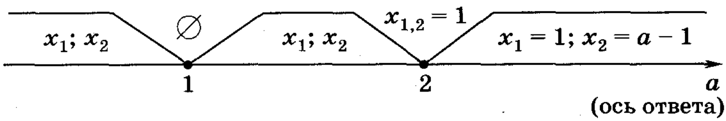


Рис. 310

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 311).

Вопросы по рис. 311

1. При каких значениях a верно неравенство $x_2 > x_1$?
2. При каких значениях a справедливо неравенство $x_2 < x_1$?
3. Найдите значения a, при которых:
   1) $x_2 - x_1 = 3$; 2) $x_2 - x_1 = -5$;
   3) $|x_2 - x_1| = 4$; 4) $|x_2 - x_1| < 2$.

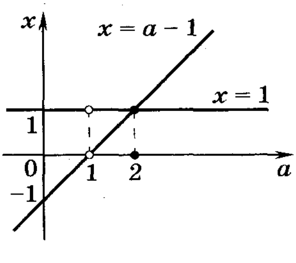


Рис. 311

№ 18. Решите уравнение $(1/2)^{(a-1)x^2-x} = 9^{\log_3 2}$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Преобразуем правую часть уравнения:

$9^{\log_3 2} = 4 = (1/2)^{-2}$.

Переходим к равносильному уравнению

$(a-1)x^2 - x + 2 = 0$.

1) Пусть $a = 1$: $x = 2$.

2) $a \neq 1$. Тогда имеем квадратное уравнение, у которого $\mathrm{D} = 9 - 8a$.

Рассматриваем три случая:

а) $a = 9/8$: $x^2 - 8x + 16 = 0$, $x_{1,2} = 4$;

б) $a > 9/8$: действительных корней нет.

в) $a < 9/8$, $a \neq 1$: $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9-8a}}{2(a-1)}$. (*)

Заполняем ось ответа (рис. 312).

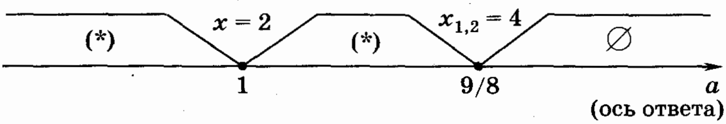


Рис. 312

№ 19. Решите уравнение $2^{(b-2)x} = 3$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

По определению логарифма имеем

$(b-2)x = \log_2 3$.

1) $b = 2$: $0 \cdot x = \log_2 3$. Решений нет.

2) $b \neq 2$: $x = \dfrac{\log_2 3}{b-2}$. (*)

Ответ спишите с оси ответа (рис. 313).

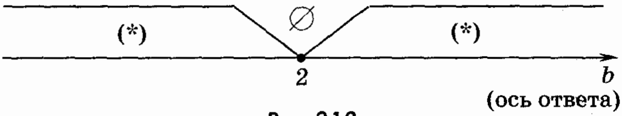


Рис. 313

№ 20. Решите уравнение $5^{a\sin x+2}=(\sqrt{5})^a$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a\in \mathrm{R}, \\ x\in \mathrm{R}. \end{cases}$

Решаем тригонометрическое уравнение

$a\sin x+2=a/2$ с параметром a.

И далее: $2a\sin x=a-4$. Рассмотрим ряд случаев.

1) $a=0$: $0\cdot\sin x=-4$. Решений нет.

2) $a\neq 0$: $\sin x=(a-4)/2a$.

а) $a=4$: $\sin x=0$, $x_1=\pi k$, $k\in \mathrm{Z}$.

б) $(a-4)/2a=1$, $a=-4$; тогда $\sin x=1$,

$x_2=\pi/2+2\pi n$, $n\in \mathrm{Z}$.

в) $(a-4)/2a=-1$, $a=4/3$; тогда $\sin x=-1$,

$x_3=-\pi/2+2\pi m$, $m\in \mathrm{Z}$.

г) $a\in(-\infty;-4)\cup(4/3;4)\cup(4;+\infty)$; тогда

$x_4=(-1)^l\arcsin((a-4)/2a)+\pi l$, $l\in \mathrm{Z}$.

д) $a\in(-4;0)\cup(0;4/3)$: решений нет.

Заносим результаты на ось параметра (рис. 314).

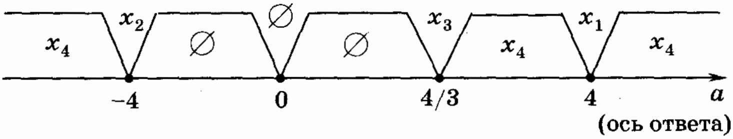


Рис. 314

Ответ: 1) Если $a \in (-\infty; -4) \cup (4/3; 4) \cup (4; +\infty)$, то $x = (-1)^l \arcsin((a-4)/2a) + \pi l$, $l \in Z$.
2) Если $a = -4$, то $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.
3) Если $a = 4/3$, то $x = -\pi/2 + 2\pi m$, $m \in Z$.
4) Если $a = 4$, то $x = \pi k$, $k \in Z$.
5) Если $a \in (-4; 4/3)$, то решений нет.

№ 21. Решите уравнение $e^{\cos x + |a|} = e \cdot 5^{\log_3 1}$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Данное уравнение легко сводится к ему равносильному уравнению $\cos x = 1 - |a|$.

1) $|a| = 1$, $a = \pm 1$: $\cos x = 0$, $x_1 = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$.

2) $1 - |a| = 1$, $a = 0$: $\cos x = 1$, $x_2 = 2\pi n$, $n \in Z$.

3) $1 - |a| = -1$, $|a| = 2$, $a = \pm 2$:
$\cos x = -1$, $x_3 = \pi + 2\pi m$, $m \in Z$.

4) $a \in (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$:
$x_4 = \pm\arccos(1 - |a|) + 2\pi l$, $l \in Z$.

5) $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$: решений нет.

Ответ запишите самостоятельно по рис. 315.

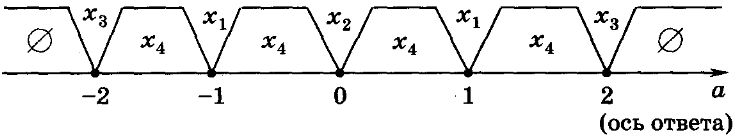


Рис. 315

№ 22. Решите уравнение $4^{|x-1|+a} = 10^{\lg 4}$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Решаем уравнение $|x - 1| + a = 1$, которое приводим к виду $|x - 1| = 1 - a$.

1) $a = 1$: $x = 1$.

2) $a > 1$: решений нет.

3) $a < 1$: $\left[\begin{array}{l} x - 1 = 1 - a, \\ x - 1 = a - 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 2 - a, \\ x = a. \end{array}\right.$ (*)

Ответ списывается с оси ответа (рис. 316).

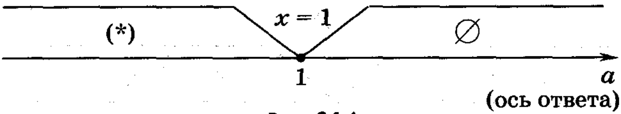


Рис. 316

№ 23. Решите уравнение $10^{|x-2|-b} = 10^{2x-1}$.

<u>Решение.</u>

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathbf{R}, \\ x \in \mathbf{R}. \end{cases}$

Переходим к равносильному уравнению

$|x - 2| - b = 2x - 1$,

а затем к совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x - 2 - 2x = b - 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ 2 - x - 2x = b - 1; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x_1 = -b - 1; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < 2, \\ x_2 = \dfrac{3-b}{3}. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решаем каждую систему отдельно.

(1): $-b - 1 \geqslant 2$, $b \leqslant -3$: $x_1 = -b - 1$. Если $b = -3$, то $x_1 = 2$.

При $b > -3$ система (1) не имеет решений (рис. 317, ось (1)).

(2): $\dfrac{3-b}{3} < 2$, $b > -3$: $x_2 = \dfrac{3-b}{3}$. В остальных случаях система (2) не имеет решений (рис. 317, ось (2)).

Объединим результаты на оси ответа (рис. 317).

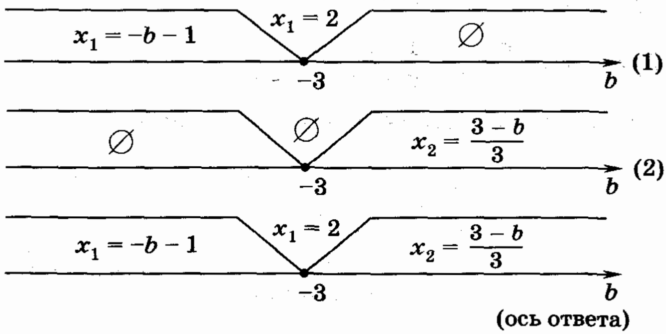


Рис. 317

<u>Ответ</u>: 1) Если $b \leqslant -3$, то $x = -b - 1$.
2) Если $b > -3$, то $x = (3 - b)/3$.

Проиллюстрируем ответ в системе координат (bOx) (рис. 318).

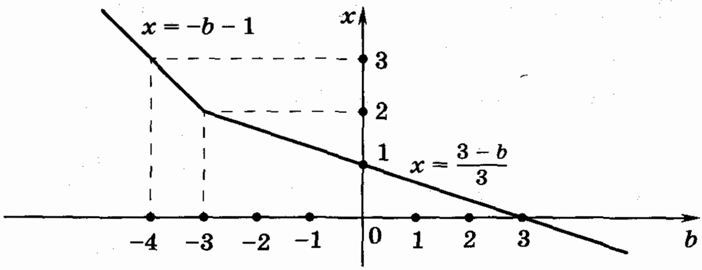


Рис. 318

№ 24. Решите уравнение $2^{\sqrt{x-a}} = 2^x$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant a. \end{cases}$

Данное уравнение равносильно уравнению

$\sqrt{x - a} = x$,

а оно равносильно системе

$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x - a = x^2. \end{cases}$

Найдем неотрицательные решения уравнения второй степени $x^2 - x + a = 0$. Рассмотрим ряд случаев.

1) Один из корней (x_1) равен 0. Тогда $a = 0$, а второй корень (x_2) равен 1.

2) $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ (рис. 319).

Достаточно решить систему $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ f(0) > 0, \end{cases}$

где $f(x) = x^2 - x + a$.

$\begin{cases} 1 - 4a \geqslant 0, \\ a > 0; \end{cases}$ $0 < a \leqslant 1/4$. Тогда

$$x_1 = (1 - \sqrt{1 - 4a})/2, \qquad (*)$$

$$x_2 = (1 + \sqrt{1 - 4a})/2. \qquad (**)$$

Если $a = 1/4$, то $x_1 = x_2 = 1/2$.

3) $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ (рис. 320): $f(0) < 0$, $a < 0$.

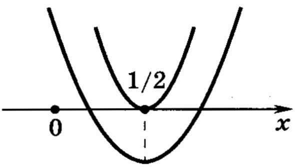


Рис. 319

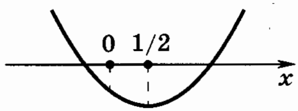


Рис. 320

Уравнение имеет только один положительный корень $x_2 = (1 + \sqrt{1 - 4a})/2$, если $a < 0$. При $a > 1/4$ решений нет.

Заполним ось ответа (рис. 321).

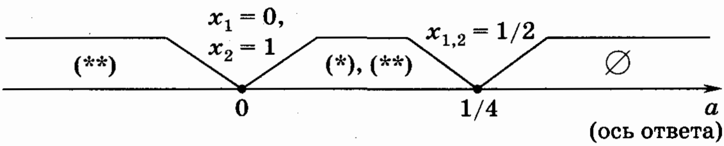


Рис. 321

Ответ: 1) Если $a \in [0; 1/4)$, то два различных корня $x_1 = (1 - \sqrt{1-4a})/2$;

$x_2 = (1 + \sqrt{1-4a})/2$.

2) Если $a = 1/4$, то $x = 1/2$.

3) Если $a < 0$, то один корень

$x_2 = (1 + \sqrt{1-4a})/2$.

4) Если $a > 1/4$, то корней нет.

№ 25. Решите уравнение $\pi^{\sqrt{(b-1)\sin x + 3b - 2}} = \pi^b$.

Решение.

Переходим от данного уравнения к равносильной системе

$$\begin{cases} (b-1)\sin x + 3b - 2 = b^2, \\ b \geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение системы представим в виде

$(b-1)\sin x = (b-1)(b-2)$.

1) $b = 1$: $0 \cdot \sin x = 0$, $x \in \mathrm{R}$.

2) $b = 0$: $\sin x = -2$. Решений нет.

3) $b < 0$: решений нет.

4) $b \neq 1$: $\sin x = b - 2$.

а) $b = 2$: $\sin x = 0$, $x_1 = \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$;

б) $b - 2 = 1$, $b = 3$: $\sin x = 1$, $x_2 = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.

в) $\begin{cases} |b-2| > 1, \\ b > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b > 3, \\ b < 1, \end{array}\right. \\ b > 0, \end{cases}$ $b \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$.

Решений нет;

г) $b \in (1; 2) \cup (2; 3)$: $x_3 = (-1)^m \arcsin(b-2) + \pi m$, $m \in Z$.

Заполним ось ответа (рис. 322).

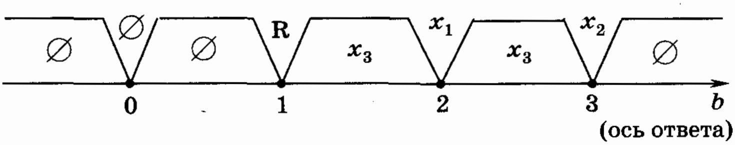


Рис. 322

Ответ: 1) Если $b \in (1; 2) \cup (2; 3)$, то $x = (-1)^m \arcsin(b-2) + \pi m$, $m \in Z$.
2) Если $b = 1$, то $x \in R$.
3) Если $b = 2$, то $x = \pi k$, $k \in Z$.
4) Если $b = 3$, то $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.
5) Если $b \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$, то решений нет.

Уравнения для самостоятельного решения

1) $2^{(a-1)x + a^2 - 1} = 1$.

2) $e^{(m-2)x^2 - 3m} = 1$.

3) $(1/2)^{\frac{x^2 - 2bx}{b}} = 2$.

4) $5^{(2-c)x^2 + x} = 8^{\log_2 \sqrt{5}}$.

5) При каких значениях b уравнение

$(2/5)^{2b+x} = (2/5)^{b-1+2bx}$

имеет положительные решения?

6) $3^{(2-m)\sqrt{x-1} + \log_3 5} = 5$.

7) $(1/2)^{(1-c)x^2 - c\log_{1/2} 3} = 3$.

8) $4^{(b-1)\cos x - 1} = 2$.

9) $(1/5)^{\sin x - a^2} = 3^{\ln 1}$.

10) $10^{|x+1| - 2b - 1} = e^{\ln 10}$.

11) $3^{k - |x+3|} = 3^{3 - kx}$.

12) $e^{\sqrt{x^2 + x + 5b^2}} = e^b$.

13) $3^{\sqrt{(c-2)\cos x + c}} = 3^c$.

* * *

№ 26. Решите уравнение $2^{ax+1} = a - 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

1) Если $a \leqslant 1$, то решений нет.

2) Пусть $a > 1$: $ax + 1 = \log_2(a-1)$,

$$ax = \log_2(a-1) - 1,\ x = \frac{\log_2(a-1) - 1}{a}. \qquad (*)$$

Ответ запишите самостоятельно по рис. 323.

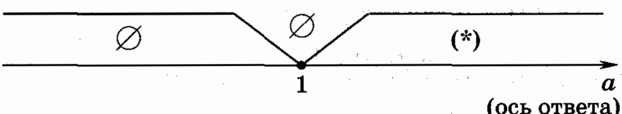


Рис. 323

№ 27. Решите уравнение $3^{(b-2)x} = b + 7$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

1) При $b \leqslant -7$ уравнение решений не имеет.

2) Пусть $b > -7$: $(b-2)x = \log_3(b+7)$.

а) $b = 2$: $0 \cdot x = 2$. Решений нет.

б) $b \neq 2$: $x = \dfrac{\log_3(b+7)}{b-2}$. (*)

Заполним ось ответа (рис. 324).

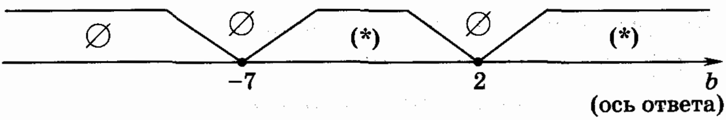


Рис. 324

Ответ: 1) Если $b \in (-\infty; -7] \cup \{2\}$, то решений нет.
2) Если $b \in (-7; 2) \cup (2; +\infty)$, то $x = \dfrac{\log_3(b+7)}{b-2}$.

№ 28. Решите уравнение $5^{cx^2} = c + 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} c \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

1) Если $c \leqslant -1$, то решений нет.

2) $c > -1$: $cx^2 = \log_5(c+1)$:

а) $c = 0$: $0 \cdot x^2 = 0$, x — любое действительное число;

б) $c \neq 0$: $x^2 = \dfrac{\log_5(c+1)}{c}$.

Докажем, что $\dfrac{\log_5(c+1)}{c} > 0$, если $c \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

Пусть $c \in (-1;\ 0)$: $\log_5(c+1) < 0$, $c < 0$, поэтому $\dfrac{\log_5(c+1)}{c} > 0$.

Если $c \in (0;\ +\infty)$, то $\log_5(c+1) > 0$ и $c > 0$.

Итак, если $c \in (-1;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, то

$$x_{1,\,2} = \pm\sqrt{\frac{\log_5(c+1)}{c}}. \qquad (*)$$

Ответ запишите сами по рис. 325.

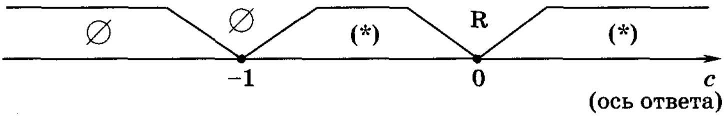


Рис. 325

№ 29. Решите уравнение $(1/2)^{(m-1)x^2} = m + 1$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $m \leqslant -1$: решений нет.

2) $m > -1$: $(m-1)x^2 = \log_{1/2}(m+1)$:

а) $m = 1$: $0 \cdot x^2 = -1$. Решений нет;

б) $m \neq 1$: $x^2 = \dfrac{\log_{1/2}(m+1)}{m-1}$.

Узнаем, при каких значениях $m \in (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ выражение $\dfrac{\log_{1/2}(m+1)}{m-1}$ принимает положительные значения. Решим на указанном множестве неравенство $\dfrac{\log_{1/2}(m+1)}{m-1} > 0$. Воспользуемся методом интервалов. Функция $y = \dfrac{\log_{1/2}(m+1)}{m-1}$ при $m \in (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ непрерывна. Находим нули функции: $\log_{1/2}(m+1) = 0$, $m = 0$ (рис. 326).

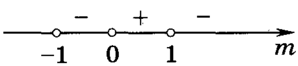


Рис. 326

Итак, если $m \in (0;\ 1)$, то $x_{1,\,2} = \pm\sqrt{\dfrac{\log_{1/2}(m+1)}{m-1}}$. (*)

При $m = 0$ $x_{1,\,2} = 0$. Если $m \in (-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$, то уравнение решений не имеет.

Заполним ось ответа (рис. 327).

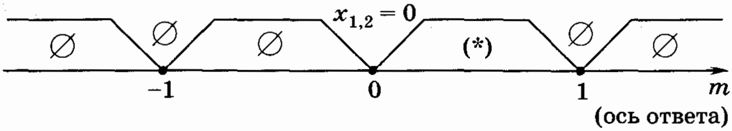


Рис. 327

Ответ: 1) Если $m \in (0;\ 1)$, то два корня

$$x_{1,\,2} = \pm\sqrt{\frac{\log_{1/2}(m+1)}{m-1}}.$$

2) Если $m = 0$, то один корень $x = 0$.

3) Если $m \in (-\infty;\ 0) \cup [1;\ +\infty)$, то решений нет.

№ 30. Решите уравнение $10^{-\lg(a+2)x^2 + x} = a + 2$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a > -2, \\ x \neq 0. \end{cases}$

Переходим к уравнению $-\lg(a+2)x^2 + x = \lg(a+2)$, которое в ООУ равносильно данному. Перепишем его в виде $\lg(a+2)x^2 - x + \lg(a+2) = 0$.

1) $\lg(a+2) = 0$, $a = -1$: $x = 0$. Но $x = 0$ не входит в ООУ.

2) $\lg(a+2) \neq 0$: $D = 1 - 4\lg^2(a+2)$.

Рассматриваем далее три случая.

а) $D = 0$: $\left[\begin{array}{l} \lg(a+2) = 1/2, \\ \lg(a+2) = -1/2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a = \sqrt{10} - 2, \\ a = (\sqrt{10}/10) - 2. \end{array}\right.$

Если $a = \sqrt{10} - 2$, то $x_{1,2} = \dfrac{1}{2\lg\sqrt{10}}$; $x_{1,2} = 1$.

Если $a = (\sqrt{10}/10) - 2$, то $x_{1,2} = \dfrac{1}{2\lg\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$; $x_{1,2} = -1$.

б) $D < 0$: $(1 - 2\lg(a + 2)) \times$ $\times (1 + 2\lg(a + 2)) < 0$. Решаем методом интервалов (рис. 328).

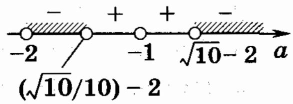


Рис. 328

Если $a \in (-2; (\sqrt{10}/10) - 2) \cup$ $\cup (\sqrt{10} - 2; +\infty)$, то решений нет.

в) $D > 0$, $a \in ((\sqrt{10}/10) - 2; -1) \cup (-1; \sqrt{10} - 2)$;

тогда $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lg^2(a + 2)}}{2\lg(a + 2)}$. (*)

Заметим, что $\dfrac{1 - \sqrt{1 - 4\lg^2(a + 2)}}{2\lg(a + 2)} \neq 0$, так как $a \neq -1$.

Нанесем все результаты на ось параметра (рис. 329).

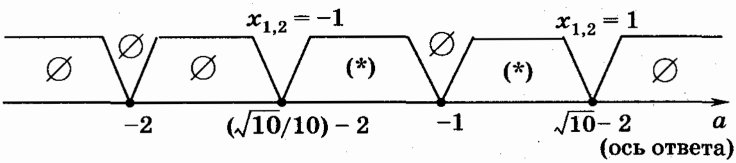


Рис. 329

Ответ: 1) Если $a \in ((\sqrt{10}/10) - 2; -1) \cup$ $\cup (-1; \sqrt{10} - 2)$, то два различных корня $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lg^2(a + 2)}}{2\lg(a + 2)}$.

2) Если $a = (\sqrt{10}/10) - 2$, то $x = -1$.

3) Если $a = \sqrt{10} - 2$, то $x = 1$.

4) Если $a \in (-\infty; (\sqrt{10}/10) - 2) \cup$ $\cup (\sqrt{10} - 2; +\infty) \cup \{-1\}$, то решений нет.

№ 31. Решите уравнение $2^{|x-a|} = a^2$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

1) Заметим, что $2^{|x-a|} \geqslant 1$. Поэтому, если $a^2 < 1$, т. е. $a \in (-1; 1)$, то решений нет.

2) Если $a = 1$, то $|x - 1| = 0$. Значит, $x = 1$.

3) При $a = -1$ получим, что $x = -1$.

4) Пусть $|a| > 1$: $|x - a| = \log_2 a^2$,

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = a + \log_2 a^2, \\ x_2 = a - \log_2 a^2. \end{array}\right. \qquad (*)$$

Ответ списывается с оси ответа (рис. 330).

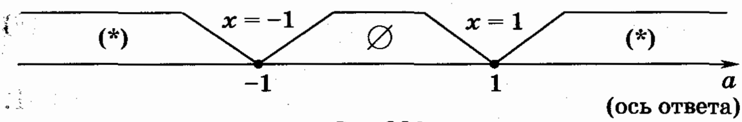


Рис. 330

№ 32. Решите уравнение $2^{|x| - \log_2(c-1)} = (c-1)^2$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} c > 1, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Переходим к равносильному уравнению

$|x| - \log_2(c-1) = 2\log_2(c-1)$.

И далее: $|x| = 3\log_2(c-1)$.

1) Если $c > 2$, то $x_{1,2} = \pm 3\log_2(c-1)$. (*)

2) Если $c = 2$, то $x = 0$.

3) Если $c \in (1; 2)$, то решений нет.

Заполним ось ответа (рис. 331).

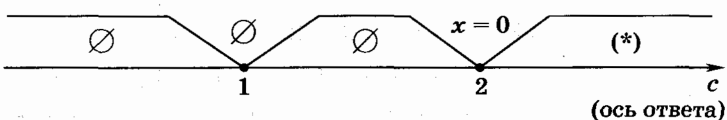


Рис. 331

Ответ: 1) Если $c > 2$, то $x_{1,2} = \pm 3\log_2(c-1)$.
2) Если $c = 2$, то $x = 0$.
3) Если $c < 2$, то решений нет.

Проиллюстрируем ответ в системе координат (cOx) (рис. 332).

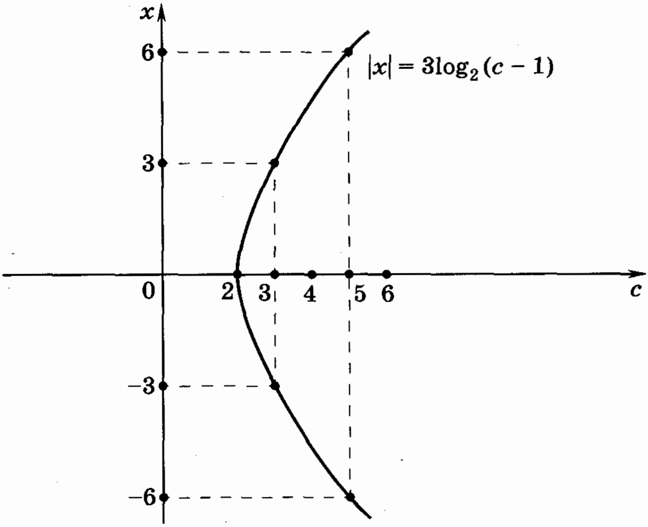


Рис. 332

№ 33. Решите уравнение $(1/2)^{|x| - \log^2_{1/2}(b-3)} = b - 3$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b > 3, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Решаем уравнение $|x| - \log^2_{1/2}(b-3) = \log_{1/2}(b-3)$:

$|x| = \log_{1/2}(b-3) \cdot (\log_{1/2}(b-3) + 1)$.

1) $\log_{1/2}(b-3) = 0$, $b = 4$: $x = 0$.

2) $\log_{1/2}(b-3) = -1$, $b = 5$: $x = 0$.

3) $\log_{1/2}(b-3) \times$ $\times (\log_{1/2}(b-3) + 1) > 0$. Решим это неравенство методом интервалов (рис. 333).

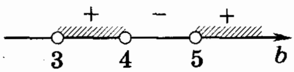


Рис. 333

Если $b \in (3;\ 4) \cup (5;\ +\infty)$, то

$$x_{1,\,2} = \pm\log_{1/2}(b-3)\cdot(\log_{1/2}(b-3)+1). \qquad (*)$$

2) Если $b \in (4;\ 5)$, то решений нет.

Ответ запишите самостоятельно по рис. 334.

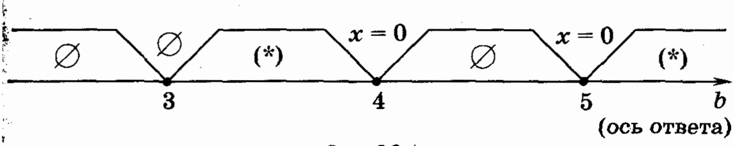


Рис. 334

№ 34. Решите уравнение $(c-2)2^{c\sqrt{x}} = c^2 - 4$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} c \in \mathbb{R}, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

$c = 2$: $x \geqslant 0$.

$c \neq 2$: $2^{c\sqrt{x}} = c + 2$.

1) Если $c \leqslant -2$, то решений нет.

2) Пусть $c > -2$, $c \neq 2$: $c\sqrt{x} = \log_2(c+2)$:

а) $c = 0$: решений нет;

б) $c \neq 0$: $\sqrt{x} = \dfrac{\log_2(c+2)}{c}$.

Решим неравенство $(\log_2(c+2))/c > 0$, если $c \in (-2;\,0) \cup (0;\,2) \cup (2;\,+\infty)$.

Находим нули функции $y = (\log_2(c+2))/c$: $c = -1$ (рис. 335).

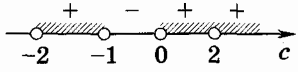


Рис. 335

Если $c \in (-2;\,-1] \cup (0;\,2) \cup (2;\,+\infty)$, то

$$x = (\log_2^2(c+2))/c^2. \qquad (*)$$

Если же $c \in (-1;\ 0)$, то решений нет. При $c = -1$ имеем $x = 0$.

Результаты заносим на ось ответа (рис. 336).

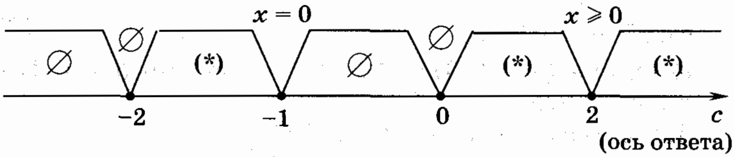


Рис. 336

Ответ: 1) Если $c \in (-2; 1] \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$, то $x = (\log_2^2 (c+2))/c^2$.
2) Если $c = 2$, то $x \geqslant 0$.
3) Если $c \in (-\infty; -2] \cup (-1; 0]$, то решений нет.

№ 35. Решите уравнение $3m(1/3)^{(5-m)|x|} = m - 3$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $m = 0$: решений нет.

2) $m \neq 0$: $(1/3)^{(5-m)|x|} = (m-3)/3m$:

а) $(m-3)/3m \leqslant 0$: $m \in (0; 3]$. В этом случае решений нет;

б) $m \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$: $(5-m)|x| = \log_{1/3} \dfrac{m-3}{3m}$.

Если $m = 5$, то решений нет.

Пусть $m \neq 5$: $|x| = \dfrac{\log_{1/2} \dfrac{m-3}{3m}}{5-m}$.

Решим методом интервалов неравенство

$\dfrac{\log_{1/2} \dfrac{m-3}{3m}}{5-m} > 0$, если $m \in (-\infty; 0) \cup (3; 5) \cup (5; +\infty)$.

$\log_{1/2} \dfrac{m-3}{3m} = 0$, если $m = -3/2$ (рис. 337).

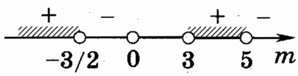


Рис. 337

Если $m \in (-\infty; -3/2) \cup (3; 5)$, то

$$x_{1,2} = \pm\frac{\log_{1/2}\dfrac{m-3}{3m}}{5-m}. \qquad (*)$$

Если $m \in (-3/2; 0) \cup (5; +\infty)$, то решений нет. Если $m = -3/2$, то $x = 0$.

Заполняем ось ответа (рис. 338).

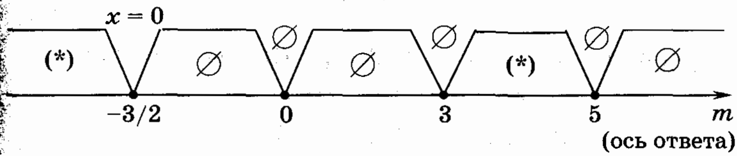


Рис. 338

<u>Ответ</u>: 1) Если $m \in (-\infty; -3/2) \cup (3; 5)$,

то два корня $x_{1,2} = \pm\frac{\log_{1/2}\dfrac{m-3}{3m}}{5-m}$.

2) Если $m = -3/2$, то $x = 0$.

3) Если $m \in (-3/2; 3] \cup [5; +\infty)$, то решений нет.

Уравнения для самостоятельного решения

1) $3^{(b-1)x-1} = b - 1$.

2) $(1/2)^{mx-3x} = m + 3$.

3) $(1/3)^{(c-1)x^2} = c$.

4) $2^{(3-a)x^2} = a + 3$.

5) $10^{2x - 4\lg(b+1)x^2} = b + 1$.

6) $(1/2)^{|2b-x|} = (b+1)^2$.

7) $e^{|x-1| + \ln^2(c-1)} = c - 1$.

8) $3^{|x| - \log_3|c-2|} = (c-2)^2$.

9) $(a-1)3^{(a-2)\sqrt{x-1}} = a^2 - 1$.

10) $(k-1)2^{(3-k)|x|} = k - 2$.

2.3. Более сложные показательные уравнения с параметром

№ 1. Решите уравнение $4^{a/x} - 2 \cdot 2^{a/x} + 1 = 0$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 0. \end{cases}$

Пусть $2^{a/x} = t$, где $t > 0$. Получим квадратное уравнение относительно t: $t^2 - 2t + 1 = 0$. И далее: $(t-1)^2 = 0$, $t = 1$, $2^{a/x} = 1$, $a/x = 0$.

Рассмотрим случаи:

1) Если $a = 0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. (*)

2) Если $a \neq 0$, то решений нет.

Ответ списываем с оси ответа (рис. 339).

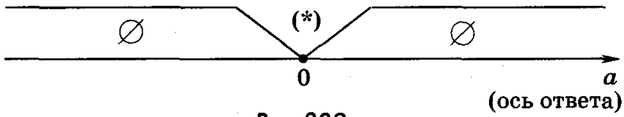


Рис. 339

Ответ: 1) При $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ решений нет.
2) При $a = 0$ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

№ 2. Решите уравнение $3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Представим данное уравнение в виде

$4^{x-2}(3 - a) = a - 27$.

Рассмотрим возможные случаи:

1) $a = 3$, тогда $4^{x-2} \cdot 0 = -24$. Решений нет.

2) $a \neq 3$, тогда $4^{x-2} = (a - 27)/(3 - a)$.

Последнее уравнение имеет решения, если $(a - 27)/(3 - a) > 0$, т. е. $a \in (3; 27)$. И тогда

$x = 2 + \log_4 \dfrac{a - 27}{3 - a}$ (рис. 340). (*)

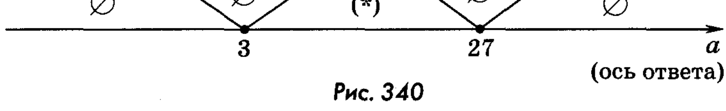


Рис. 340

Ответ: 1) Если $a \in (3;\, 27)$, то $x = 2 + \log_4 \dfrac{a - 27}{3 - a}$.

2) Если $a \in (-\infty;\, 3] \cup [27;\, +\infty)$, то решений нет.

№ 3. Решите уравнение $4^x - (5b - 3)2^x + 4b^2 - 3b = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Пусть $2^x = t$, где $t > 0$. Решаем квадратное уравнение $t^2 - (5b - 3)t + 4b^2 - 3b = 0$, у которого $D = 9(b - 1)^2$.

а) $D = 0$, $b = 1$: $t_{1,\,2} = 1$. Получаем уравнение $2^x = 1$; $x = 0$.

б) $D > 0$, $b \in (-\infty;\, 1) \cup (1;\, +\infty)$: $\left[\begin{array}{l} t_1 = 4b - 3, \\ t_2 = b. \end{array}\right.$

Нам надо учесть, что $t > 0$. Сравним t_1 и t_2 с нулем (рис. 341).

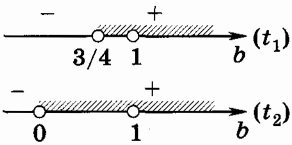


Рис. 341

А теперь рассмотрим ряд случаев.

1) $b \leqslant 0$: решений нет.

2) $0 < b < 3/4$, тогда $2^x = b$, $x_2 = \log_2 b$. (*)

3) $b = 3/4$, тогда $x_2 = \log_2 3/4$.

4) $b > 3/4$, $b \neq 1$, тогда $\left[\begin{array}{ll} x_2 = \log_2 b, & (*) \\ x_1 = \log_2 (4b - 3). & (**) \end{array}\right.$

Заполняем ось ответа (рис. 342).

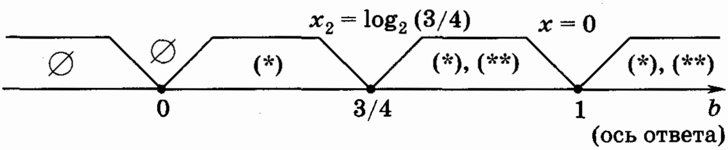


Рис. 342

Ответ: 1) Если $b \in (0; 3/4]$, то $x_2 = \log_2 b$.

2) Если $b \in (3/4; 1) \cup (1; +\infty)$, то два различных корня $x_1 = \log_2 (4b - 3)$, $x_2 = \log_2 b$.

3) Если $b = 1$, то $x = 0$.

4) Если $b \in (-\infty; 0]$, то решений нет.

№ 4. Решите уравнение $4^{ax^2} + 2 \cdot 2^{\frac{a+1}{a+2} + ax^2} + 1 = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \neq -2, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Пусть $2^{ax^2} = t$, где $t > 0$. Тогда мы получаем квадратное уравнение $t^2 + 2 \cdot 2^{\frac{a+1}{a+2}} t + 1 = 0$. Если это уравнение имеет корни, то по теореме Виета $\begin{cases} t_1 + t_2 = -2 \cdot 2^{\frac{a+1}{a+2}}, \\ t_1 t_2 = 1, \end{cases}$ откуда следует, что $t_1 < 0$ и $t_2 < 0$. Значит, данное уравнение не имеет корней ни при каком $a \in \mathbb{R}$.

№ 5. Решите уравнение $9^{\frac{c-2}{x+1}} - 4 \cdot 3^{\frac{c-2}{x+1}} + 2^{\frac{1}{c}} = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} c \neq 0, \\ x \neq -1. \end{cases}$

Пусть $3^{\frac{c-2}{x+1}} = t$, где $t > 0$; $t^2 - 4t + 2^{1/c} = 0$. Заметим, что в данном случае, если квадратное уравнение имеет корни, то они положительны ($t_1 + t_2 = 4$; $t_1 t_2 = 2^{1/c}$). У полученного квадратного уравнения $D_1 = 4 - 2^{1/c}$.

а) $D_1 = 0$, $c = 1/2$: $t_{1,2} = 2$, $3^{\frac{-3}{2(x+1)}} = 2$,

$-\dfrac{3}{2(x+1)} = \log_3 2$,

$$x_{1,2} = -1 - \frac{3}{2\log_3 2}. \qquad (*)$$

б) $D_1 > 0$: $2^{1/c} < 4$, $1/c < 2$, $(1-2c)/c < 0$,

$c \in (-\infty; 0) \cup (1/2; +\infty)$.

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 2 + \sqrt{4 - 2^{1/c}}, \\ t_2 = 2 - \sqrt{4 - 2^{1/c}}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ll} 3^{\frac{c-2}{x+1}} = 2 + \sqrt{4 - 2^{1/c}}, & (1) \\ 3^{\frac{c-2}{x+1}} = 2 - \sqrt{4 - 2^{1/c}}. & (2) \end{array}\right.$$

Решим сначала уравнение (1):

$\dfrac{c-2}{x+1} = \log_3 (2 + \sqrt{4 - 2^{1/c}})$,

$$x_1 = -1 + (c-2)/\log_3 (2 + \sqrt{4 - 2^{1/c}}). \qquad (**)$$

Заметим, что $x_1 = -1$, если $c = 2$.

Решим теперь уравнение (2):

$\dfrac{c-2}{x+1} = \log_3 (2 - \sqrt{4 - 2^{1/c}})$.

1) $\log_3 (2 - \sqrt{4 - 2^{1/c}}) = 0$, $2 - \sqrt{4 - 2^{1/c}} = 1$, $4 - 2^{1/c} = 1$, $2^{1/c} = 3$, $1/c = \log_2 3$, $c = \log_3 2$. В этом случае уравнение (2) решений не имеет.

Есть только корень $x_1 = -1 + \dfrac{\log_3 2 - 2}{\log_3 (2 + \sqrt{4 - 2^{\log_2 3}})}$;

$x_1 = -3 + \log_3 2$. (Δ)

2) $c \neq \log_3 2$: $x_2 = -1 + \dfrac{c-2}{\log_3 (2 - \sqrt{4 - 2^{1/c}})}$. $\qquad (\Delta\Delta)$

Если $c = 2$, то $x_2 = -1$. Значит, при $c = 2$ данное уравнение решений не имеет.

в) $D_1 < 0$, тогда $0 < c < 1/2$. Решений нет.

Заполняем ось ответа (рис. 343).

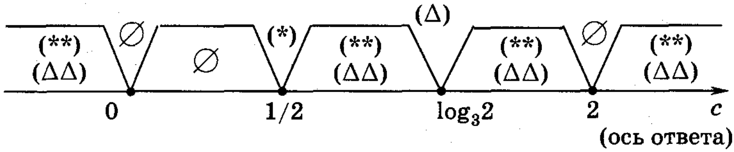


Рис. 343

<u>Ответ</u>: 1) Если $c \in (-\infty; 0) \cup (1/2; \log_3 2) \cup$ $\cup (\log_3 2; 2) \cup (2; +\infty)$, то два различных корня $x_1 = -1 + \dfrac{c-2}{\log_3(2+\sqrt{4-2^{1/c}})}$;

$$x_2 = -1 + \frac{c-2}{\log_3(2-\sqrt{4-2^{1/c}})}.$$

2) Если $c = 1/2$, то один корень

$$x_{1,2} = -1 - \frac{3}{2\log_3 2}.$$

3) Если $c = \log_3 2$, то один корень

$x_1 = -3 + \log_3 2$.

4) Если $c \in [0; 1/2) \cup \{2\}$, то решений нет.

№ 6. Решите уравнение

$$\frac{2^x-3}{2^x-1} + \frac{2^x-4}{2^x-2} = \frac{4b}{2^x - 3\cdot 2^x + 2}.$$

<u>Решение</u>.

$$\text{ООУ: } \begin{cases} b \in R, \\ x \ne 0, \\ x \ne 1. \end{cases}$$

Пусть $2^x = t$, где $t > 0$.

Решаем уравнение $\dfrac{t-3}{t-1} + \dfrac{t-4}{t-2} = \dfrac{4b}{(t-1)(t-2)}$, где

$$\begin{cases} t > 0, \\ t \ne 1, \\ t \ne 2. \end{cases}$$

Освободившись от знаменателей, переходим к уравнению-следствию

$(t-3)(t-2)+(t-1)(t-4)-4b=0.$

После несложных преобразований получим квадратное уравнение $t^2-5t+5-2b=0$, у которого $D=5+8b$.

1) $D<0$, т. е. $b<-5/8$. Решений нет.

2) $D=0$, т. е. $b=-5/8$, тогда $t_{1,2}=5/2$; $2^x=5/2$, $x_{1,2}=\log_2 5/2$.

3) $D>0$, т. е. $b>-5/8$. Тогда квадратное уравнение имеет два корня: $\left[\begin{array}{l} t_1=(5+\sqrt{5+8b})/2, \\ t_2=(5-\sqrt{5+8b})/2. \end{array}\right.$

Заметим, что $t_1>5/2$, а значит, $t_1\neq 1$, $t_2\neq 2$.

Решаем уравнение $2^x=(5+\sqrt{5+8b})/2$, тогда

$$x_1=\log_2\frac{5+\sqrt{5+8b}}{2}. \qquad (*)$$

Данное уравнение имеет корень x_1 при любом значении $b\geqslant -5/8$.

Для $t_2=(5-\sqrt{5+8b})/2$ решим систему

$$\begin{cases} (5-\sqrt{5+8b})/2>0, \\ (5-\sqrt{5+8b})/2\neq 1, \\ (5-\sqrt{5+8b})/2\neq 2, \\ b>-5/8; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{5+8b}<5, \\ \sqrt{5+8b}\neq 3, \\ \sqrt{5+8b}\neq 1, \\ b>-5/8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5+8b<25, \\ 5+8b\neq 9, \\ 5+8b\neq 1, \\ b>-5/8; \end{cases} \quad \begin{cases} b<5/2, \\ b\neq 1/2, \\ b\neq -1/2, \\ b>-5/8. \end{cases}$$

Итак, если $b\in(-5/8;-1/2)\cup(-1/2;1/2)\cup(1/2;5/2)$, то

$$x_2=\log_2\frac{5-\sqrt{5+8b}}{2}. \qquad (**)$$

Если $b = -1/2$, то $x_1 = \log_2 3$.

При $b = 1/2$ получим $x_1 = 2$.

Если $b = 5/2$, то $x_1 = \log_2 5$.

Ответ списывается с оси ответа (рис. 344).

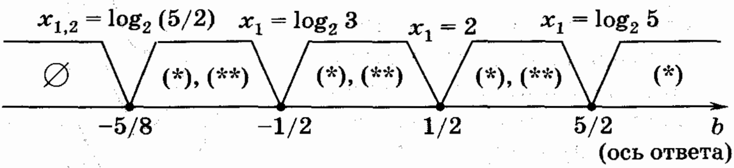


Рис. 344

Ответ: 1) Если $b \in (-5/8; -1/2) \cup (-1/2; 1/2) \cup$ $\cup\, (1/2; 5/2)$, то два корня

$$x_1 = \log_2 \frac{5 + \sqrt{5 + 8b}}{2};\ x_2 = \log_2 \frac{5 - \sqrt{5 + 8b}}{2}.$$

2) Если $b \geqslant 5/2$, то $x_1 = \log_2 \dfrac{5 + \sqrt{5 + 8b}}{2}$.

3) Если $b = -5/8$, то $x_{1,\,2} = \log_2 5/2$.

4) Если $b = -1/2$, то $x_1 = \log_2 3$.

5) Если $b = 1/2$, то $x_1 = 2$.

6) Если $b = 5/2$, то $x_1 = \log_2 5$.

7) Если $b < -5/8$, то решений нет.

№ 7. Решите уравнение $144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Пусть $12^{|x|} = t$, где $t \geqslant 1$.

Получим квадратное уравнение $t^2 - 2t + a = 0$, у которого $D_1 = 1 - a$.

1) $a > 1$: решений нет.

2) $a = 1$: $t_{1,\,2} = 1$, $12^{|x|} = 1$, $x_{1,\,2} = 0$.

3) $a < 1$: $t_1 = 1 - \sqrt{1 - a}$, $t_2 = 1 + \sqrt{1 - a}$.

Легко видеть, что $t_1 < 1$, а $t_2 > 1$ при $a < 1$.

$1 + \sqrt{1-a} = 12^{|x|}$, $|x| = \log_{12}(1 + \sqrt{1-a})$,

$x = \pm\log_{12}(1 + \sqrt{1-a})$. (*)

Уравнение $t^2 - 2t + a = 0$, где $t \geqslant 1$, можно решить и графически, рассмотрев три возможных случая расположения параболы $y = t^2 - 2t + a$ (рис. 345).

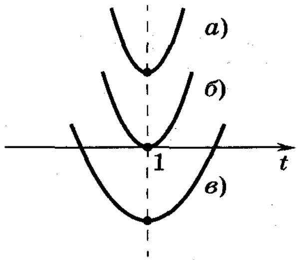


Рис. 345

а) $D < 0$, т. е. $a > 1$. Решений нет.

б) $D = 0$, т. е. $a = 1$: $t_{1,2} = 1$, $12^{|x|} = 1$; $x_{1,2} = 0$.

в) $D > 0$, т. е. $a < 1$. Больший корень уравнения больше 1:

$$t_2 = 1 + \sqrt{1-a},\ x = \pm\log_{12}(1 + \sqrt{1-a}). \qquad (*)$$

Результаты нанесем на ось ответа (рис. 346).

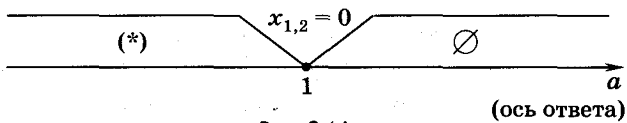


Рис. 346

№ 8. При каких значениях c уравнение

$4^{2/x} + c \cdot 4^{1/x} - c - 1 = 0$

имеет решения?

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} c \in \mathrm{R}, \\ x \neq 0. \end{cases}$

Пусть $4^{1/x} = t$, где $t > 0$, $t \neq 1$. Получим квадратное уравнение $t^2 + c \cdot t - c - 1 = 0$, которое имеет два корня: $\left[\begin{array}{l} t_1 = 1, \\ t_2 = -c - 1. \end{array}\right.$

Уравнение $4^{1/x} = -c - 1$ имеет решения, если:
$\left[\begin{array}{l} -c-1>0, \\ -c-1\neq 1; \end{array}\right.$ $\begin{cases} c<-1, \\ c\neq -2. \end{cases}$

Ответ: $c \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$.

№ 9. При каких значениях a уравнение $a \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$ имеет единственное решение?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Введя замену $t = 2^{-x}$, где $t > 0$, получим уравнение $t^2 - 5t + a = 0$.

Данное в условии уравнение имеет единственное решение в следующих случаях.

У полученного квадратного уравнения:

а) два одинаковых положительных корня;

б) один корень равен 0, а другой — положительный;

в) один корень положительный, а другой — отрицательный.

Рассмотрим эти случаи.

а) $D = 0$: $25 - 4a = 0$, $a = 25/4$; $t_{1,2} = 5/2$.

б) $t_1 = 0$ при $a = 0$. Тогда $t_2 = 5$.

в) $a < 0$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \{25/4\}$.

№ 10. При каких значениях b уравнение

$(b+1)2^{2x} + 2^x + 1 - b = 0$

имеет единственное решение?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Пусть $2^x = t$, где $t > 0$. Задание свелось к нахождению таких значений b, при которых уравнение $(b+1)t^2 + t + 1 - b = 0$ имеет единственное положительное решение.

Рассмотрим сначала случай, когда коэффициент при t^2 равен 0: $b + 1 = 0$, $b = -1$. Тогда уравнение первой степени $t+2=0$ имеет отрицательное решение. Значит, $b=-1$ не подходит.

Если $b \neq -1$, то уравнение относительно t — второй степени. Нас интересуют следующие случаи.

а) Уравнение имеет два одинаковых положительных корня.

б) Один корень равен 0, а другой — положительный.

в) Один корень положительный, а другой — отрицательный.

Рассмотрим эти случаи.

а) $D=0$: $D=4b^2-3$, $b=\pm\sqrt{3}/2$.

Если $b=\sqrt{3}/2$, то $t_1=t_2=-1/(\sqrt{3}+2)$, $t_{1,2}<0$.

Если $b=-\sqrt{3}/2$, то $t_1=t_2=1/(\sqrt{3}-2)$, $t_{1,2}<0$.

Значит, первый случай невозможен.

б) $t_1=0$. Тогда $b=1$. Получим квадратное уравнение $2t^2+t=0$, у которого $t_1=0$, $t_2<0$. Этот случай тоже невозможен.

в) Покажем схематично, как должны располагаться параболы (рис. 347).

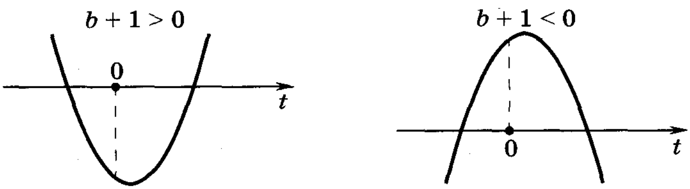


Рис. 347

Достаточно теперь решить неравенство

$(b+1)f(0)<0$, где $f(t)=(b+1)t^2+t+1-b$:

$(b+1)(1-b)<0$, $1-b^2<0$, $|b|>1$.

<u>Ответ</u>: $|b|>1$.

№ 11. При каких значениях a уравнение

$36^x+(a-1)6^x+a-2a^2=0$

имеет два различных действительных корня?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

При $t = 6^x$, где $t > 0$, получаем квадратное уравнение $t^2 + (a - 1)t + a - 2a^2 = 0$.

1 способ.

Найдем его дискриминант: $\mathrm{D} = (a - 1)^2 - 4a + 8a^2 = (3a - 1)^2$. И тогда $t_1 = a$, $t_2 = 1 - 2a$.

Теперь достаточно решить систему $\begin{cases} a > 0, \\ 1 - 2a > 0, \\ a \neq 1 - 2a; \end{cases}$

$\begin{cases} a > 0, \\ a < 1/2, \\ a \neq 1/3, \end{cases}$ $a \in (0;\ 1/3) \cup (1/3;\ 1/2)$.

2 способ.

Покажем схематично, как должны располагаться параболы $f(t) = t^2 + (a - 1)t + a - 2a^2$, чтобы квадратное относительно t уравнение имело два различных положительных корня (рис. 348).

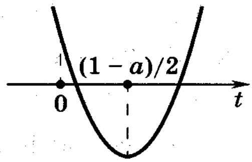


Рис. 348

Составляем и решаем систему

$\begin{cases} (1 - a)/2 > 0, \\ \mathrm{D} > 0, \\ f(0) > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a < 1, \\ a \neq 1/3, \\ a(1 - 2a) > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq 1/3, \\ 0 < a < 1/2. \end{cases}$

$a \in (0;\ 1/3) \cup (1/3;\ 1/2)$.

№ 12. При каких значениях c уравнение

$$(c - 1)3^{2x} - (2c - 1)3^x - 1 = 0$$

имеет два различных действительных корня?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} c \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Пусть $3^x = t$, где $t > 0$. Получим уравнение

$(c-1)t^2 - (2c-1)t - 1 = 0$.

1) $c = 1$: $t = -1$, но $-1 < 0$.

2) $c \neq 1$. Тогда имеем квадратное уравнение, у которого $D = (2c-1)^2 + 4(c-1) = 4c^2 - 3$.

Решим теперь систему

$$\begin{cases} -\dfrac{B}{2A} > 0, \\ D > 0, \\ A \cdot f(0) > 0, \end{cases} \quad \text{где } f(t) = (c-1)t^2 - (2c-1)t - 1;$$

$$\begin{cases} \dfrac{2c-1}{2(c-1)} > 0, \\ 4c^2 - 3 > 0, \\ c - 1 < 0 \text{ (рис. 349)}, \end{cases}$$

$c < -\sqrt{3}/2$.

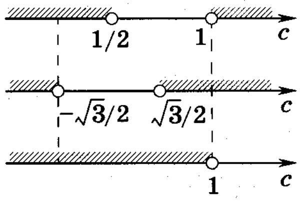


Рис. 349

Ответ: $c \in (-\infty; -\sqrt{3}/2)$.

№ 13. При каких значениях a уравнение

$25^x - (a-4)5^x - 2a^2 + 10a - 12 = 0$

не имеет действительных корней?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

При $t = 5^x$, где $t > 0$, получим квадратное уравнение $t^2 - (a-4)t - 2a^2 + 10a - 12 = 0$, у которого $D = (3a-8)^2$. Находим корни уравнения:

$t_1 = 2a - 6$; $t_2 = 2 - a$.

Достаточно решить систему неравенств $\begin{cases} 2a - 6 \leqslant 0, \\ 2 - a \leqslant 0. \end{cases}$

Ответ: $[2; 3]$.

№ 14. При каких значениях m уравнение

$(m-5)4^x + m \cdot 2^x + m + 3 = 0$

не имеет действительных корней?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Пусть $2^x = t$, где $t > 0$. Рассмотрим уравнение

$(m - 5)t^2 + mt + m + 3 = 0.$

1) $m = 5$, тогда $5t + 8 = 0$, $t = -8/5$. Значит, при $m = 5$ данное уравнение не имеет решений.

2) $m \neq 5$, тогда

$\mathrm{D} = -3m^2 + 8m + 60 = -3(m + 10/3)(m - 6).$

а) $\mathrm{D} < 0$: (рис. 350).
Если $m \in (-\infty; -10/3) \cup \cup (6; +\infty)$, то действительных корней нет.

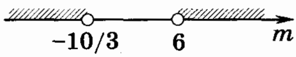


Рис. 350

б) $t_1 = t_2 = 0$. Этот случай невозможен.

в) $t_1 = 0$, $t_2 < 0$. Если $t_1 = 0$, то $m = -3$. Уравнение $-8t^2 - 3t = 0$ имеет один корень, равный 0, а другой — меньше нуля.
Итак, при $m = -3$ данное уравнение не имеет действительных корней.

г) $t_1 < 0$; $t_2 < 0$: (рис. 351).

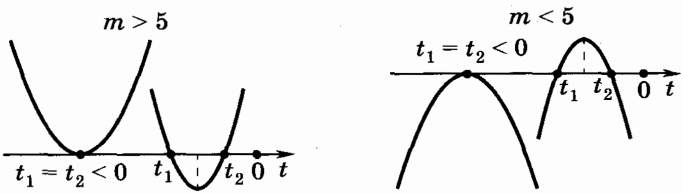


Рис. 351

Опираясь на теорему о расположении корней квадратного трехчлена (оба корня меньше некоторого числа), достаточно решить систему

$$\begin{cases} \mathrm{D} \geqslant 0, \\ \dfrac{m}{2(5 - m)} < 0, \\ (m - 5)f(0) > 0, \text{ где } f(t) = (m - 5)t^2 + mt + m + 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10/3 \leqslant m \leqslant 6, \\ \left[\begin{array}{l} m < 0, \\ m > 5, \end{array}\right. \\ (m-5)(m+3) > 0 \end{cases}$$

(рис. 352),

$$\left[\begin{array}{l} -10/3 \leqslant m < -3, \\ 5 < m \leqslant 6. \end{array}\right.$$

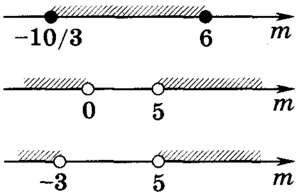


Рис. 352

Ответ: $m \in (-\infty; -3] \cup [5; +\infty)$.

№ 15. При каких значениях b уравнения

$4^{2/x} - 5 \cdot 4^{1/x} + 4 = 0$ и $|b-3|3^{x+1} + b \cdot 9^x = 27$

равносильны?

Решение.

Решим сначала первое уравнение.

Пусть $4^{1/x} = t$, где $t > 0$, $t \neq 1$. Находим корни уравнения $t^2 - 5t + 4 = 0$: $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

Корнем уравнения $4^{1/x} = 4$ является $x = 1$. Найдем такие значения b, при которых $x = 1$ является корнем второго уравнения. При $x = 1$ получим уравнение относительно b:

$9 \cdot |b-3| + 9b = 27$, $|b-3| = 3 - b$, $b \leqslant 3$.

А теперь займемся вторым уравнением.

Пусть $3^x = t$, где $t > 0$. Оно примет вид:

$3|b-3|t + bt^2 - 27 = 0$. Учтем, что

$b \leqslant 3$: $bt^2 + 3(3-b)t - 27 = 0$.

Рассмотрим случаи:

1) $b = 0$: $t = 3$, $3^x = 3$, $x = 1$. Итак, при $b = 0$ уравнения равносильны.

2) $b \neq 0$: $D = 9(b+3)^2$. И тогда $t_1 = 3$, $t_2 = -9/b$. Получим совокупность двух уравнений: $\left[\begin{array}{l} 3^x = 3, \\ 3^x = -9/b. \end{array}\right.$

Для того чтобы $x = 1$ был единственным решением совокупности, надо потребовать, чтобы b было положительным числом или равнялось -3.

Ответ: $b \in [0; 3] \cup \{-3\}$.

№ 16. Решите уравнение $\dfrac{(3^x - b)(3^x - b + 3)}{x^2 - x - 2} = 0.$

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 2. \end{cases}$

Приравняв нулю числитель дроби, стоящей в левой части данного уравнения, получим $\left[\begin{array}{ll} 3^x = b, & (1) \\ 3^x = b - 3. & (2) \end{array}\right.$ Решим каждое из получившихся уравнений.

(1): $3^x = b$. 1) Если $b \leqslant 0$, то уравнение (1) решений не имеет.

2) $b > 0$: $x_1 = \log_3 b$. (*)

Исследование.

$\begin{cases} x_1 = \log_3 b, \\ b > 0, \\ \log_3 b \neq -1, \\ \log_3 b \neq 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \log_3 b, \\ b > 0, \\ b \neq 1/3, \\ b \neq 9. \end{cases}$

Если $b = 1/3$ или $b = 9$, то уравнение (1) решений не имеет.

Результаты решения уравнения (1) представлены на оси (1) рис. 353.

(2): $3^x = b - 3$. 1) Если $b \leqslant 3$, то уравнение (2) решений не имеет.

2) $b > 3$: $x_2 = \log_3 (b - 3)$. (**)

Исследование.

$\begin{cases} x_2 = \log_3 (b - 3), \\ b > 3, \\ \log_3 (b - 3) \neq -1, \\ \log_3 (b - 3) \neq 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \log_3 (b - 3), \\ b > 3, \\ b \neq 3\frac{1}{3}, \\ b \neq 12. \end{cases}$

Если $b = 3\frac{1}{3}$ или $b = 12$, то уравнение (2) решений не имеет (ось (2) рис. 353).

• Объединяем решения на оси ответа (рис. 353).

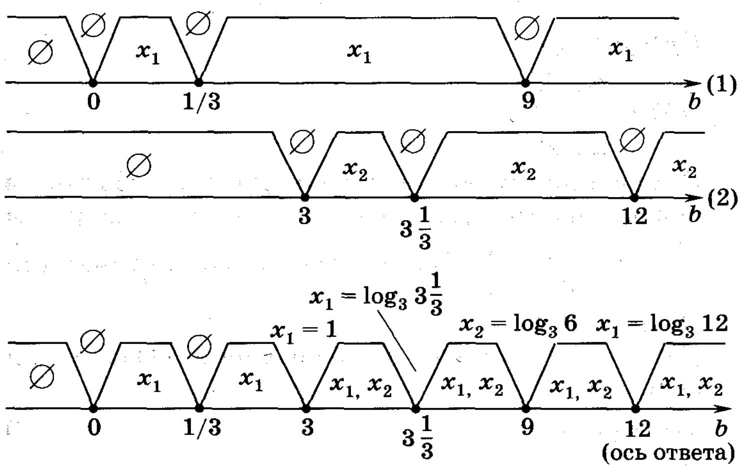


Рис. 353

Ответ: 1) Если $x \in \left(3; 3\frac{1}{3}\right) \cup \left(3\frac{1}{3}; 9\right) \cup (9; 12) \cup$
$\cup (12; +\infty)$, то два корня $x_1 = \log_3 b$;
$x_2 = \log_3 (b - 3)$.

2) Если $b \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$, то $x_1 = \log_3 b$.

3) Если $b = 3\frac{1}{3}$, то $x_1 = \log_3 3\frac{1}{3}$.

4) Если $b = 9$, то $x_2 = \log_3 6$.

5) Если $b = 12$, то $x_1 = \log_3 12$.

6) Если $b \leqslant 0$ или $b = 1/3$,
то решений нет.

№ 17. Сколько корней имеет уравнение

$(1/2)^{2x} - 2 \cdot (1/2)^x = a$

на отрезке [1; 4] в зависимости от значений параметра a?

Решение.

Пусть $(1/2)^x = t$, где $t > 0$. Если $x \in [1; 4]$, то $t \in [1/16; 1/2]$. Остается выяснить, сколько корней имеет уравнение $t^2 - 2t = a$, если $t \in [1/16; 1/2]$, в зависимости от значений параметра a.

Решаем графически: $y = t^2 - 2t$, $t \in [1/16; 1/2]$; $y = a$ (рис. 354).

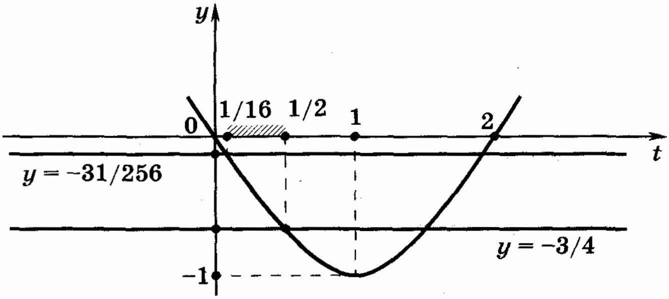


Рис. 354

Если $t \in [1/16; 1/2]$, то $y \in [-31/256; -3/4]$.

Поэтому, если $a \in [-31/256; -3/4]$, то уравнение $t^2 - 2t = a$, где $t \in [1/16; 1/2]$, имеет один корень.

Если же $a \notin [-31/256; -3/4]$, то корней нет.

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \in [-31/256; -3/4]$, то данное уравнение *имеет на отрезке* $[1; 4]$ *один* корень.

2) Если $a \notin [-31/256; -3/4]$, то данное уравнение не имеет корней на отрезке $[1; 4]$.

№ 18. При каких значениях a система

$$\begin{cases} \cos^4 x - (a+2)\cos^2 x + 2a = 0, \\ 4^{\sqrt{y}} + a \cdot 2^{\sqrt{y}} + a - 1 = 0 \end{cases}$$ имеет решения?

<u>Решение</u>.

ООС: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$ $\begin{cases} x \in \mathrm{R}, \\ y \geqslant 0, \\ a \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Рассмотрим сначала первое уравнение системы. Пусть $\cos^2 x = t$, где $t \in [0; 1]$; $t^2 - (a+2)t + 2a = 0$,

$t_1 = 2$, $t_2 = a$. Число 2 не удовлетворяет условию $t \in [0; 1]$. Итак, $\cos^2 x = a$, где $a \in [0; 1]$.

Переходим ко второму уравнению системы. Пусть $2^{\sqrt{y}} = z$, где $z \geqslant 1$: $z^2 + a \cdot z + a - 1 = 0$, $z_1 = -1$, $z_2 = 1 - a$; $-1 < 1$. Получаем уравнение $2^{\sqrt{y}} = 1 - a$, где $1 - a \geqslant 1$, т. е. $a \leqslant 0$. Данная система будет совместной, если $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant 1, \\ a \leqslant 0, \end{cases}$ т. е. $a = 0$.

Ответ: 0.

№ 19. Решите систему

$$\begin{cases} 2(x^2 + a^2) + 5y^2 + 24y + 29 = 6(xy + a) + 2ay + 14x, \\ 2^x + 3^y = 35. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ООС: } \begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}, \\ y \in \mathrm{R}. \end{cases}$$

Займемся сначала первым уравнением системы:

$$2x^2 + 2a^2 + 5y^2 + 24y + 29 - 6xy - 6a - 2ay - 14x = 0,$$

$$2x^2 - 2(3y + 7)x + 5y^2 - 2ay + 24y - 6a + 2a^2 + 29 = 0.$$

Последнее уравнение можно рассматривать как квадратное относительно x:

$$D_1 = (3y + 7)^2 - 2(5y^2 - 2ay + 24y + 2a^2 - 6a + 29) =$$
$$= 9y^2 + 42y + 49 - 10y^2 + 4ay - 48y - 4a^2 + 12a - 58 =$$
$$= -y^2 - 6y + 4ay - 4a^2 + 12a - 9 = -(y^2 + 6y - 4ay +$$
$$+ 4a^2 - 12a + 9) = -(y - 2a + 3)^2.$$

Видим, что $-(y - 2a + 3)^2 \leqslant 0$. Значит, $y = 2a - 3$. Тогда $x = (3y + 7)/2$, т. е. $x = 3a - 1$.

Второе уравнение системы примет вид

$$2^{3a - 1} + 3^{2a - 3} = 35.$$

Подбором находим одно решение: $a = 2$. Докажем, что других решений нет. Рассмотрим функцию $f(a) = 2^{3a - 1} + 3^{2a - 3}$. Найдем $f'(a)$:

$$f'(a) = 2^{3a - 1} \cdot 3 \ln 2 + 3^{2a - 3} \cdot 2 \ln 3.$$

При любом значении a справедливо неравенство $f'(a) > 0$, т. е. $f(a)$ возрастает на множестве R. Поэтому других решений, кроме $a = 2$, уравнение $2^{3a-1} + 3^{2a-3} = 35$ не имеет.

Ответ: 1) Если $a = 2$, то $x = 5$; $y = 1$.
2) Если $a \neq 2$, то решений нет.

Упражнения для самостоятельного решения

Решите уравнения (1—5)

1) $b \cdot 5^{1-x} - 8 = 2b + 3 \cdot 5^{1-x}$.
2) $m \cdot 3^{x^2} + 4 = 2 \cdot 3^{x^2} + m^2$.
3) $25^x - (2k-1) \cdot 5^x - 2k = 0$.
4) $(1/2)^{2x} - (3m-1)(1/2)^x + 2m^2 + m = 0$.
5) $\dfrac{2^x+3}{2^x-2} + \dfrac{2^x+7}{2^x-4} = \dfrac{2a}{4^x - 6 \cdot 2^x + 8}$.
6) При каких значениях b уравнение $9^x - 2(3b-2) \times \times 3^x + 5b^2 - 4b = 0$ имеет два различных корня?
7) При каких значениях p уравнение $(p-4)9^x + (p+1)3^x + 2p - 1 = 0$ не имеет решений?
8) При каких значениях m уравнение $(m-2)5^{2x} + 2 \cdot 5^x + m - 2 = 0$ имеет единственное решение?
9) При каких значениях a уравнения $4^{x+1} + 4^{x+4} = 2^{x+2} + 16$ и $|a-9|3^{x-2} + a \cdot 9^{x-1} = 1$ равносильны?
10) При каких значениях параметра m уравнение $\dfrac{(3^x-m)(3^x+m)}{x^2-5x+6} = 0$ имеет ровно один корень?

3. Показательные неравенства с параметром

3.1. Подготовительные неравенства

№ 1. Решите неравенство $5^{2-x} > -b^2 - 2$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Учитывая, что $-b^2 - 2 < 0$ при любом $b \in \mathrm{R}$, а $5^{2-x} > 0$ при любом $x \in \mathrm{R}$, можно сделать вывод, что любая пара значений x и b удовлетворяет неравенству.

Ответ: $x \in \mathrm{R}$ при любом $b \in \mathrm{R}$.

№ 2. Решите неравенство $(1/2)^{\sqrt{x-1}} > -m^2 + 2m - 3$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

Легко видеть, что $-m^2 + 2m - 3 < 0$ при любом значении $m \in \mathrm{R}$, а потому неравенству удовлетворяет любая пара значений x и m из области определения.

Ответ: $x \geqslant 1$ при любом $m \in \mathrm{R}$.

№ 3. Решите неравенство $e^{\arcsin^2 x} > \sqrt{1 - a^2}$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in [-1; 1], \\ x \in [-1; 1]. \end{cases}$

Заметим, что $e^{\arcsin^2 x} \geqslant 1$ при $x \in [-1; 1]$, а выражение $\sqrt{1 - a^2}$ принимает значения из отрезка $[0; 1]$. Поэтому, если $\sqrt{1 - a^2} < 1$, т. е. $a \in [-1; 0) \cup (0; 1]$, то $x \in [-1; 1]$. Если же $a = 0$, то неравенству удовлетворяют все значения $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$.

Ответ: 1) Если $a \in [-1; 0) \cup (0; 1]$, то $x \in [-1; 1]$.
2) Если $a = 0$, то $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$.

№ 4. Решите неравенство $2^{\sqrt{x-1}} > |a|/a$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \neq 0, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

Если $a > 0$, то данное неравенство примет вид $2^{\sqrt{x-1}} > 1$. Ему удовлетворяют все $x \in (1; +\infty)$. Если $a < 0$, то имеем неравенство $2^{\sqrt{x-1}} > -1$, которому удовлетворяют все $x \in [1; +\infty)$.

Ответ: 1) Если $a > 0$, то $x \in (1; +\infty)$.
2) Если $a < 0$, то $x \in [1; +\infty)$.
3) Если $a = 0$, то решений нет.

№ 5. Решите неравенство $2^{x^2} \geqslant \sin d$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} d \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Учтем, что $2^{x^2} \geqslant 1$, $-1 \leqslant \sin d \leqslant 1$. Значит, данному неравенству удовлетворяет любая пара допустимых значений x и d.

Ответ: $x \in \mathrm{R}$ при любом $d \in \mathrm{R}$.

№ 6. Решите неравенство $2^{x^2} > \sin d$.

Ответ: 1) Если $d \neq \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, то $x \in \mathrm{R}$.
2) Если $d = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

№ 7. Решите неравенство $3^{|x-1|} \leqslant \cos d$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} d \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Данное неравенство имеет решения, только если $\cos d = 1$, т. е. $d = 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$. Тогда $x = 1$.

Ответ: 1) Если $d = 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, то $x = 1$.
2) Если $d \neq 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, то решений нет.

№ 8. Решите неравенство $(1/3)^{-x^2} > \cos m$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Рассматриваем случай, когда $\cos m \neq 1$, т. е. $m \neq 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$. Тогда $x \in \mathrm{R}$. Если же $m = 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, то неравенству $(1/3)^{-x^2} > 1$ удовлетворяют все значения $x \in \mathrm{R}$, кроме нуля.

Ответ: 1) Если $m \neq 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, то $x \in \mathrm{R}$.
2) Если $m = 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

№ 9. Решите неравенство $5^{-x^2-2x-1} \geqslant b^2+1$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} b \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Учитывая, что 5^{-x^2-2x-1} принимает значения из промежутка $(0; 1]$, а выражение b^2+1 больше или равно 1, делаем вывод, что данное неравенство имеет решения только при $b=0$. Тогда $x=-1$.

<u>Ответ</u>: 1) Если $b \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, то решений нет.
2) Если $b=0$, то $x=-1$.

№ 10. Решите неравенство

$(\pi/2)^{-x^2-1} < \arcsin a + \arccos a$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} a \in [-1; 1], \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Переходим к неравенству $(\pi/2)^{-x^2-1} < \pi/2$, которое в области определения данного неравенства ему равносильно. Решаем теперь неравенство $-x^2-1<1$: $x^2>-2$, $x \in \mathbb{R}$.

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \in [-1; 1]$, то $x \in \mathbb{R}$.
2) Если $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то решений нет.

№ 11. Решите неравенство $(1{,}5)^{-x^4} \geqslant |\sin c| + 1$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} c \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

В области определения данного неравенства справедливы следующие неравенства: $1 \leqslant |\sin c| + 1 \leqslant 2$, $0 < (1{,}5)^{-x^4} \leqslant 1$. Поэтому данное неравенство имеет решения только при тех значениях c, при которых $\sin c = 0$, т. е. $c = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $x=0$.

Ответ: 1) Если $c = \pi k$, $k \in Z$, то $x = 0$.
2) Если $c \neq \pi k$, $k \in Z$, то решений нет.

№ 12. Решите неравенство $3^{-\sqrt{x}} < |\cos b - \sqrt{2}/2| + 1$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in R, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Пусть $\cos b = \sqrt{2}/2$, т. е. $b = \pm\pi/4 + 2\pi k$, $k \in Z$. Решаем неравенство $3^{-\sqrt{x}} < 1$: $x > 0$.
Если $b \neq \pm\pi/4 + 2\pi k$, $k \in Z$, то $x \geqslant 0$.

Ответ: 1) Если $b = \pm\pi/4 + 2\pi k$, $k \in Z$, то $x > 0$.
2) Если $b \neq \pm\pi/4 + 2\pi k$, $k \in Z$, то $x \geqslant 0$.

№ 13. Решите неравенство $3^{\frac{2x-5}{x-1}} > |c - 1|/(c - 1)$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} c \neq 1, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Рассмотрим два случая.

1) $c > 1$: $3^{\frac{2x-5}{x-1}} > 1$, $\frac{2x-5}{x-1} > 0$,

$x \in (-\infty; 1) \cup (2,5; +\infty)$.

2) $c < 1$: $3^{\frac{2x-5}{x-1}} > -1$, $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: 1) Если $c > 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (2,5; +\infty)$.
2) Если $c < 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
3) Если $c = 1$, то решений нет.

№ 14. Решите неравенство $(m - 2) \cdot 3^{\sqrt{1-x}} > 0$.

Ответ: 1) Если $m \leqslant 2$, то решений нет.
2) Если $m > 2$, то $x \leqslant 1$.

№ 15. Решите неравенство $(1 - c^2) \cdot 2^{\arccos x} < 0$.

Ответ: 1) Если $|c| > 1$, то $x \in [-1; 1]$.
2) Если $|c| \leqslant 1$, то решений нет.

№ 16. Решите неравенство $(1 - c^2) \cdot 2^{\arccos x} \geqslant 0$.

Ответ: 1) Если $|c| > 1$, то решений нет.
2) Если $|c| \leqslant 1$, то $x \in [-1; 1]$.

№ 17. Решите неравенство $b \cdot 3^x \leqslant b^2$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Перейдем к неравенству $b \cdot (3^x - b) \leqslant 0$. Если $b \leqslant 0$, то $x \in \mathrm{R}$. Если $b > 0$, то решим неравенство $3^x - b \leqslant 0$: $3^x \leqslant b$, $x \leqslant \log_3 b$.

Ответ: 1) Если $b \leqslant 0$, то $x \in \mathrm{R}$.
2) Если $b > 0$, то $x \in (-\infty; \log_3 b]$.

№ 18. Решите неравенство $a^2 \cdot 2^x > a$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Переходим к неравенству $a(a \cdot 2^x - 1) > 0$. Рассмотрим три случая.

1) $a = 0$: решений нет.

2) $a < 0$: $x \in \mathrm{R}$.

3) $a > 0$: $a \cdot 2^x - 1 > 0$, $2^x > 1/a$, $x > -\log_2 a$.

Ответ: 1) Если $a < 0$, то $x \in \mathrm{R}$.
2) Если $a > 0$, то $x \in (-\log_2 a; +\infty)$.
3) Если $a = 0$, то решений нет.

№ 19. Решите неравенство $(a - 1) \cdot ((1/2)^x - |a|) \geqslant 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Рассмотрим ряд случаев.

1) $a = 1$: $x \in \mathrm{R}$.

2) $a > 1$: $(1/2)^x - a \geqslant 0$, $(1/2)^x \geqslant a$, $x \leqslant \log_{1/2} a$.

3) $a < 1$: $(1/2)^x - |a| \leqslant 0$,
$(1/2)^x \leqslant |a|$.

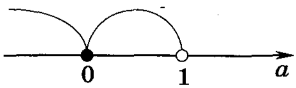


Рис. 355

Раскроем $|a|$ (рис. 355) и решим неравенство на каждом из промежутков.

а) $a = 0$: $(1/2)^x \leqslant 0$. Решений нет.

б) $0 < a < 1$: $(1/2)^x \leqslant a$; $x \geqslant \log_{1/2} a$.

в) $a < 0$: $(1/2)^x \leqslant -a$; $x \geqslant \log_{1/2}(-a)$.

Ответ: 1) Если $a > 1$, то $x \in (-\infty; \log_{1/2} a]$.
2) Если $a = 1$, то $x \in \mathrm{R}$.
3) Если $0 < a < 1$, то $x \in [\log_{1/2} a; +\infty)$.
4) Если $a < 0$, то $x \in [\log_{1/2}(-a); +\infty)$.
5) Если $a = 0$, то решений нет.

№ 20. Решите неравенство $5^{ax-1} < -a^2$.

Ответ: нет решений ни при каком значении $a \in \mathrm{R}$.

№ 21. Решите неравенство $(1/3)^{(b-1)\sqrt{x-3}} \geqslant 0$.

Ответ: $x \geqslant 3$ при любом значении $b \in \mathrm{R}$.

№ 22. Решите неравенство $4^{\frac{(p-1)^2}{x^2}} \leqslant 1$.

Ответ: 1) Если $p = 1$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2) Если $p \neq 1$, то решений нет.

3.2. Простейшие показательные неравенства с параметром

№ 1. Решите неравенство $3^x > a$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Решая данное неравенство аналитически, учтем, что $3^x > 0$ при любом $x \in \mathrm{R}$, а также то, что функция $y = \log_3 t$ возрастает.

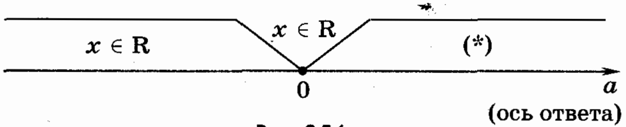


Рис. 356

Если $a \leqslant 0$, то $x \in$ R. Пусть $a > 0$: $x > \log_3 a$ (*) (рис. 356).

Решим теперь это неравенство графически в системе координат (xOy) (рис. 357). Если $a \leqslant 0$, то график функции $y = 3^x$ расположен над прямыми с уравнением $y = a$, а потому $x \in$ R. Если $a_0 > 0$, то график функции $y = 3^x$ расположен над прямой $y = a_0$ при $x > \log_3 a_0$, где $\log_3 a_0$ — абсцисса точки пересечения указанных графиков.

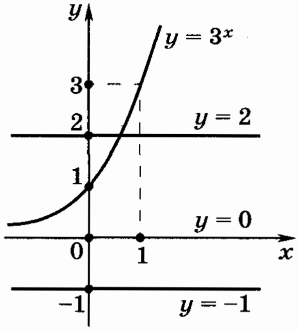


Рис. 357

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 358).

На рис. 358 заштриховано множество точек, координаты каждой из которых удовлетворяют неравенству. Если, например, $a = -1$, то неравенству удовлетворяют координаты любой точки прямой $a = -1$. Если $a = 1$, то имеем луч с началом в точке (1; 0), расположенной выше графика функции $y = \log_3 a$.

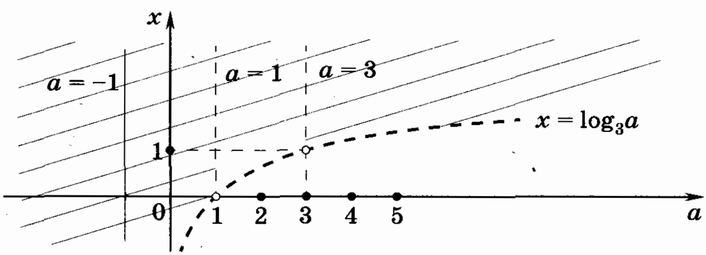


Рис. 358

Вопросы по рис. 358

1. Укажите некоторые решения неравенства при $a = 1$; $a = 3$; $a = -2$; $a = 0$; $a = 5$.
2. Координаты каких из перечисленных ниже точек удовлетворяют неравенству: $(3; 0)$; $(4; -1)$; $(0; 0)$; $(-1; 2)$; $(3; 1)$; $(4; \log_3 4)$; $(4; \log_3 5)$; $(1/2; \log_3 (1/5))$; $(1/2; \log_3 (3/4))$?

№ 2. Решите неравенство $(1/2)^x \geqslant b - 1$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in \mathbf{R}, \\ x \in \mathbf{R}. \end{cases}$

Если $b \leqslant 1$, то $b - 1 \leqslant 0$, а потому данному неравенству удовлетворяет любое $x \in \mathbf{R}$.

Пусть $b > 1$: $x \leqslant \log_{1/2} (b - 1)$. (*)

В этом случае мы воспользовались свойством убывания логарифмической функции $y = \log_{1/2} t$.

Результаты зафиксируем на оси ответа (рис. 359).

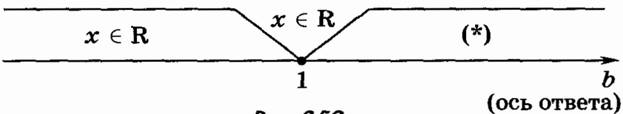


Рис. 359

Ответ: 1) Если $b \leqslant 1$, то $x \in \mathbf{R}$.
2) Если $b > 1$, то $x \leqslant \log_{1/2} (b - 1)$.

Проиллюстрируем ответ в системе координат (bOx) (рис. 360).

Вопросы по рис. 360

1. Укажите несколько решений неравенства при $b = 1$; $b = 2$; $b = 3$; $b = 0$; $b = -1$; $b = 1\frac{1}{2}$.
2. Координаты каких из перечисленных ниже точек, удовлетворяют неравенству: $(2; 0)$; $(4; -2)$; $(4; -3)$; $(5; -2)$; $(1; 0)$; $(-2; -3)$; $(-3; 1)$; $(3; \log_{1/2} 5)$; $(3; \log_{1/2} (1{,}5))$; $\left(1\frac{1}{2}; \log_{1/2} \frac{1}{3}\right)$; $\left(1\frac{1}{2}; \log_{1/2} 3\right)$?

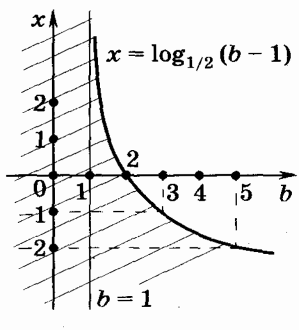


Рис. 360

№ 3. Решите неравенство $10^x < a + 2$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Пусть $a \leqslant -2$. Тогда $a + 2 \leqslant 0$. Решений нет.

Если $a > -2$, то $x < \lg (a + 2)$.

Ответ: 1) Если $a > -2$, то $x < \lg (a + 2)$.
2) Если $a \leqslant -2$, то решений нет.

Проиллюстрируйте ответ самостоятельно в системе координат (aOx).

№ 4. Решите неравенство $7^{x-1} \leqslant c(c + 2)$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} c \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Неравенство имеет решения, если $c(c + 2) > 0$, т. е. $c \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$. В этом случае

$$x - 1 \leqslant \log_7 (c(c + 2)),\ x \leqslant 1 + \log_7 (c(c + 2)). \qquad (*)$$

Если же $c \in [-2; 0]$, то решений нет.

Ответ запишите самостоятельно по рис. 361.

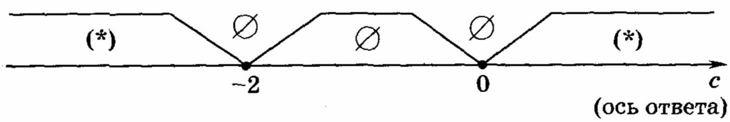


Рис. 361

№ 5. Решите неравенство $(1/5)^{|x+4|} \leqslant a$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Легко видеть, что $0 < (1/5)^{|x+4|} \leqslant 1$.

Рассмотрим теперь ряд случаев.

1) $a \leqslant 0$: решений нет.

2) $a \geqslant 1$: $x \in R$.

3) $0 < a < 1$. Тогда $|x+4| \geqslant \log_{1/5} a$. Учитывая, что $\log_{1/5} a > 0$, перейдем к совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} x+4 \geqslant \log_{1/5} a, \\ x+4 \leqslant -\log_{1/5} a; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x \geqslant -4+\log_{1/5} a, \\ x \leqslant -4-\log_{1/5} a. \end{array}\right. \qquad (*)$$

Заполняем ось ответа (рис. 362).

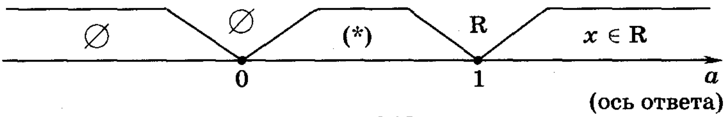


Рис. 362

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \geqslant 1$, то $x \in \mathbf{R}$.
2) Если $0 < a < 1$,
то $x \in (-\infty; -4-\log_{1/5} a] \cup$
$\cup [-4+\log_{1/5} a; +\infty)$.
3) Если $a \leqslant 0$, то решений нет.

№ 6. Решите неравенство $2^{|x-2|} \leqslant (b-3)/(2b-1)$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} b \neq 1/2, \\ x \in \mathbf{R}. \end{cases}$

Учтем, что $2^{|x-2|} \geqslant 1$.

1) Пусть $(b-3)/(2b-1) < 1$, тогда

$(-b-2)/(2b-1) < 0$, $(b+2)/(2b-1) > 0$, $\left[\begin{array}{l} b > 1/2, \\ b < -2. \end{array}\right.$

Данное неравенство в этом случае не имеет решений.

2) Если $b = -2$, то получим неравенство $2^{|x-2|} \leqslant 1$, тогда $x = 2$.

3) Пусть $b \in (-2; 1/2)$, т. е. $(b-3)/(2b-1) > 1$. Тогда $|x-2| \leqslant \log_2 \dfrac{b-3}{2b-1}$,

$$-\log_2 \frac{b-3}{2b-1} \leqslant x-2 \leqslant \log_2 \frac{b-3}{2b-1},$$

$$x \in \left[2-\log_2 \frac{b-3}{2b-1}; 2+\log_2 \frac{b-3}{2b-1}\right]. \qquad (*)$$

Представим результаты на оси ответа (рис. 363).

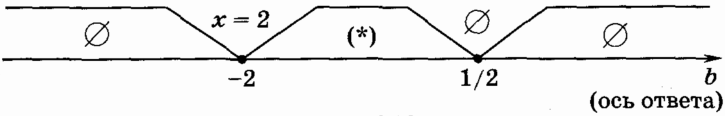


Рис. 363

Ответ: 1) Если $b \in \left(-2; \frac{1}{2}\right)$,

то $x \in \left[\log_2 \frac{4(2b-1)}{b-3}; \log_2 \frac{4(b-3)}{2b-1}\right]$.

2) Если $b = -2$, то $x = 2$.

3) Если $b \in (-\infty; -2) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$,

то решений нет.

№ 7. Решите неравенство $(1/7)^{x-9} \geqslant \frac{a(a+1)}{2-a}$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \neq 2, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

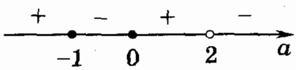


Рис. 364

Рассматриваем ряд случаев (рис. 364):

1) $\frac{a(a+1)}{2-a} < 0$, т. е. $a \in (-1; 0) \cup (2; +\infty)$. В этом случае $x \in \mathrm{R}$.

2) $a = -1$ или $a = 0$: $(1/7)^{x-9} \geqslant 0$, $x \in \mathrm{R}$.

3) $b \in (-\infty; -1) \cup (0; 2)$: $x - 9 \leqslant \log_{1/7} \frac{a(a+1)}{2-a}$,

$$x \leqslant 9 + \log_{1/7} \frac{a(a+1)}{2-a}. \qquad (*)$$

Заполняем ось ответа (рис. 365).

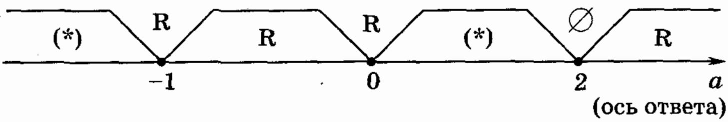


Рис. 365

Ответ: 1) Если $a \in [-1; 0] \cup (2; +\infty)$, то $x \in \mathrm{R}$.
2) Если $a \in (-\infty; -1) \cup (0; 2)$,
то $x \in \left(-\infty; 9 + \log_{1/7} \dfrac{a(a+1)}{2-a}\right]$.
3) Если $a = 2$, то решений нет.

№ 8. Решите неравенство $3^{x^2} \leqslant \sqrt{a}$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \geqslant \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) Учитывая, что $3^{x^2} \geqslant 1$ при любом $x \in \mathrm{R}$, заключаем, что данное неравенство не имеет решений при $a < 1$.

2) $a = 1$: $x^2 \leqslant 0$, $x = 0$.

3) $a > 1$: $|x| \leqslant \sqrt{\log_3 \sqrt{a}}$ (рис. 366). (*)

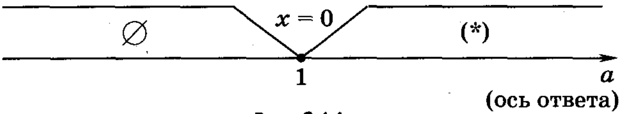


Рис. 366

Ответ: 1) Если $a > 1$, то $x \in \left[-\sqrt{\log_3 \sqrt{a}}\,; \sqrt{\log_3 \sqrt{a}}\,\right]$.
2) Если $a = 1$, то $x = 0$.
3) Если $a < 1$, то решений нет.

№ 9. Решите неравенство $2^x \leqslant \sin m$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) Если $\sin m \leqslant 0$, т. е. $m \in [-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, $k \in \mathrm{Z}$, то решений нет.

2) Пусть $0 < \sin m \leqslant 1$, т. е. $m \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathrm{Z}$. Тогда $x \leqslant \log_2 (\sin m)$.

Ответ: 1) Если $m \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathrm{Z}$,
то $x \in (-\infty; \log_2 (\sin m)]$.
2) Если $m \in [-\pi + 2\pi k, 2\pi k]$, $k \in \mathrm{Z}$,
то решений нет.

№ 10. Решите неравенство $(1/3)^{|x|} > \cos a$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $\cos a \leqslant 0$: $a \in [\pi/2 + 2\pi k; 3\pi/2 + 2\pi k]$, $k \in \mathrm{Z}$. В этом случае $x \in \mathrm{R}$.

2) $\cos a = 1$: $a = 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. Получаем неравенство $(1/3)^{|x|} > 1$, которое решений не имеет.

3) $0 < \cos a < 1$: $a \in (-\pi/2 + 2\pi m; 2\pi m) \cup$ $\cup (2\pi t; \pi/2 + + 2\pi t)$, $m \in \mathrm{Z}$, $t \in \mathrm{Z}$.

Тогда $|x| < \log_{1/3}(\cos a)$.

Ответ: 1) Если $a \in [\pi/2 + 2\pi k; 3\pi/2 + 2\pi k]$, $k \in \mathrm{Z}$, то $x \in \mathrm{R}$.
2) Если $a = 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$, то решений нет.
3) Если $a \in (-\pi/2 + 2\pi m; 2\pi m) \cup$ $\cup (2\pi t; \pi/2 + 2\pi t)$, $m \in \mathrm{Z}$, $t \in \mathrm{Z}$, то $x \in (-\log_{1/3}(\cos a); \log_{1/3}(\cos a))$.

№ 11. Решите неравенство $2^{1/(x-1)} < b$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \neq 1. \end{cases}$

1) $b \leqslant 0$: решений нет.

2) $b > 0$: $1/(x - 1) < \log_2 b$, $\dfrac{1 - (x-1)\log_2 b}{x - 1} < 0$.

Обозначим $x - 1$ через t: $(1 - t \cdot \log_2 b)/t < 0$. Рассмотрим ряд случаев:

а) $0 < b < 1$. Тогда $\log_2 b < 0$. Решаем неравенство методом интервалов (рис. 367):

$\begin{cases} t > \log_b 2, \\ t < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x - 1 > \log_b 2, \\ x - 1 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 + \log_b 2, \\ x < 1; \end{cases}$ (*)

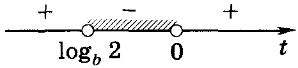


Рис. 367

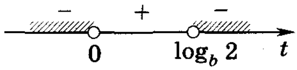


Рис. 368

б) $b = 1$: $t < 0$, $x < 1$;

в) $b > 1$. Тогда $\log_2 b > 0$ (рис. 368):

$$\left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 1 + \log_b 2. \end{array}\right. \qquad (**)$$

Ответ запишите самостоятельно по рис. 369.

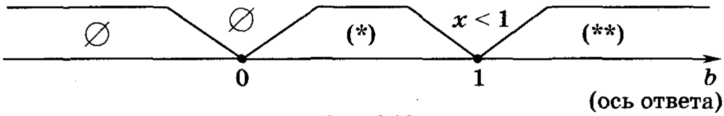


Рис. 369

№ 12. Решите неравенство $(1/2)^{-\sqrt{x-1}} > a - 1$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

Заметим, что $(1/2)^{-\sqrt{x-1}} \geqslant 1$.

1) $a - 1 < 1$, т. е. $a < 2$: $x \geqslant 1$.

2) $a = 2$: $x > 1$.

3) $a > 2$: $-\sqrt{x-1} < \log_{1/2}(a-1)$. Учитываем, что $\log_{1/2}(a-1) < 0$. Тогда

$\sqrt{x-1} > -\log_{1/2}(a-1)$, $x - 1 > \log^2_{1/2}(a-1)$,

$$x > 1 + \log^2_{1/2}(a-1). \qquad (*)$$

Ответ запишите самостоятельно по рис. 370.

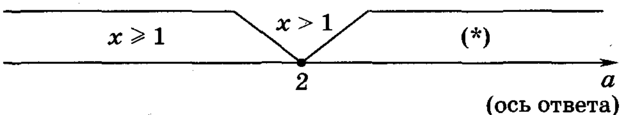


Рис. 370

Неравенства для самостоятельного решения

1) $2^{1-x} > b - 1$.
2) $(1/3)^{2x} < a + 2$.
3) $(1/5)^{x+4} \leqslant (a-1)(a+5)$.
4) $(1/3)^{|x+1|} < a - 2$.
5) $4^{|x+1|} > (a+5)/(a-2)$.
6) $(0,5)^{|x-3|} \geqslant c$.
7) $10^{3x-1} \geqslant \dfrac{\sqrt{a^2}(a-1)}{a-3}$.
8) $(1/2)^{1/(2-x)} > m - 1$.
9) $3^{2/(x-2)} > a$.
10) $e^{-x^2} \geqslant |a-1|$.
11) $(1/2)^{-x} \geqslant \cos b$.
12) $(1/5)^{|x-1|} < \sin c$.
13) $10^{\sqrt{x-3}} \leqslant t^2 - 3$.
14) $(1/4)^{\sqrt{2-x}} > k + 1$.

* * *

№ 13. Решите неравенство $(1/7)^{(a-2)x} < 1$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Переходим к равносильному неравенству $(a-2)x > 0$.

1) Если $a = 2$, то решений нет.
2) Если $a > 2$, то $x > 0$.
3) Если $a < 2$, то $x < 0$.

Результаты показаны на рис. 371.

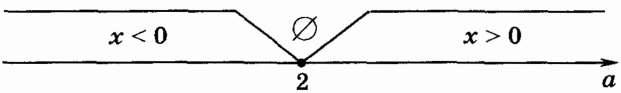


Рис. 371

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 372).

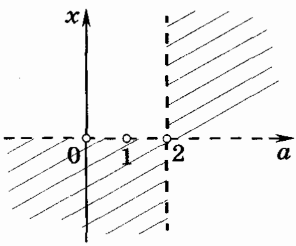


Рис. 372

№ 14. Решите неравенство $10^{ax/(a+2)} \leqslant 1/2$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \neq -2, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Достаточно решить неравенство

$ax/(a+2) \leqslant -\lg 2$.

1) $a = 0$: $0 \cdot x \leqslant -\lg 2$. Решений нет.

2) $a \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$. Тогда $x \leqslant -\dfrac{(a+2)\lg 2}{a}$. (*)

3) $a \in (-2; 0)$. В этом случае $x \geqslant -\dfrac{(a+2)\lg 2}{a}$. (**)

Ответ запишите самостоятельно по рис. 373.

Рис. 373

№ 15. Решите неравенство $(1/3)^{(bx-1)/(b+1)} > 3$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} b \neq -1, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$(bx-1)/(b+1) < -1$, $b(x+1)/(b+1) < 0$.

Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{b}{b+1} > 0, \\ x+1 < 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{b}{b+1} < 0, \\ x+1 > 0, \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty), \\ x < -1. \end{cases} \\ \begin{cases} b \in (-1; 0), \\ x > -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Если $b = 0$, то решений нет. Отметим результаты на оси ответа (рис. 374).

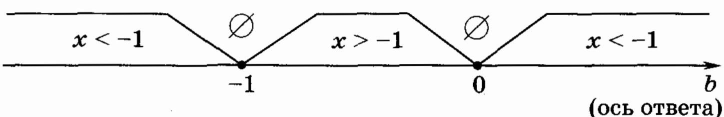


Рис. 374

Проиллюстрируем ответ в системе координат (bOx) (рис. 375).

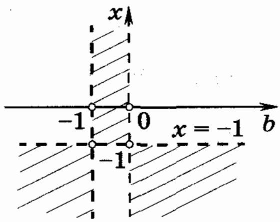


Рис. 375

№ 16. Решите неравенство

$3^{mx^2-m+1} > 4^{\log_2 3}$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} m \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Переходим к неравенству

$3^{mx^2-m+1} > 9$:

$mx^2 - m + 1 > 2$, $mx^2 > m + 1$.

1) $m = 0$: $0 \cdot x^2 > 1$. Решений нет.

2) $m > 0$: $x^2 > (m+1)/m$, $|x| > \sqrt{(m+1)/m}$. (*)

3) $m < 0$: $x^2 < (m+1)/m$;

а) $m \in [-1; 0)$: решений нет;

б) $m < -1$: $|x| < \sqrt{\dfrac{m+1}{m}}$. (**)

Заполняем ось ответа (рис. 376).

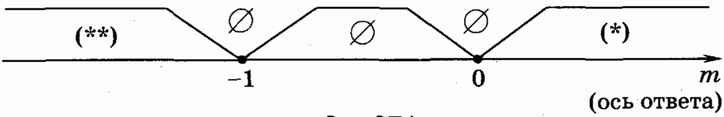


Рис. 376

№ 17. Решите неравенство $(1/2)^{\frac{x^2+2ax}{2a+1}} > 2^{\ln\frac{1}{e}}$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \neq -1/2, \\ x \in R. \end{cases}$

Рассмотрим неравенство $(1/2)^{\frac{x^2+2ax}{2a+1}} > 1/2$. Приведем его к равносильному $(x^2 + 2ax)/(2a+1) < 1$:

$(x^2 + 2ax - 2a - 1)/(2a+1) < 0$,

$(x-1)(x+2a+1)/(2a+1) < 0$,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a+1 > 0, \\ (x-1)(x+2a+1) < 0; \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} 2a+1 < 0, \\ (x-1)(x+2a+1) > 0. \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Решаем систему (1).
Если $2a + 1 > 0$, т. е. $a > -1/2$, то $1 > -2a - 1$. Поэтому, решая второе неравенство системы методом интервалов (рис. 377), получим

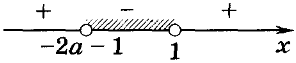


Рис. 377

$x \in (-2a - 1;\ 1)$. (*)

Решая систему (2), рассмотрим три случая.

1) $a < -1$ (рис. 378):
$x \in (-\infty;\ 1) \cup (-2a - 1;\ +\infty)$. (**)

2) $a = -1$: $(x - 1)^2 > 0$, $x \neq 1$.

3) $a \in (-1;\ -1/2)$ (рис. 379):
$x \in (-\infty;\ -2a - 1) \cup (1;\ +\infty)$. (***)

Ответ на рис. 380.

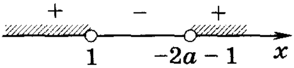


Рис. 378

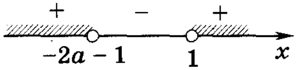


Рис. 379

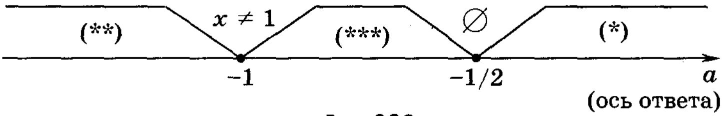


Рис. 380

Для иллюстрации ответа вновь обратимся к системе координат (aOx) (рис. 381).

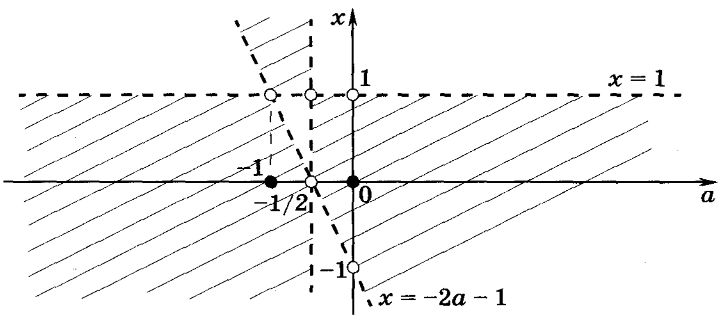


Рис. 381

№ 18. Решите неравенство $3^{(m-2)x^2+x} \geqslant 1/9$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$(m-2)x^2 + x \geqslant -2$, $(m-2)x^2 + x + 2 \geqslant 0$.

1) $m = 2$: $x \geqslant -2$.

2) $m \neq 2$. Найдем дискриминант квадратного трехчлена $(m-2)x^2 + x + 2$: $\mathrm{D} = 17 - 8m$.

Рассмотрим теперь ряд случаев.

а) $\mathrm{D} \leqslant 0$, т. е. $m \geqslant 17/8$. Тогда $x \in \mathrm{R}$.

б) $2 < m < 17/8$: $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{17 - 8m}}{2(m-2)}$,

$x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{17 - 8m}}{2(m-2)}$ — корни квадратного трехчлена. В этом случае

$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$. (*)

в) $m < 2$. Заметим, что $m - 2 < 0$ и $x_2 < x_1$. И тогда $x \in [x_2; x_1]$. (**)

Ответ запишите самостоятельно по рис. 382.

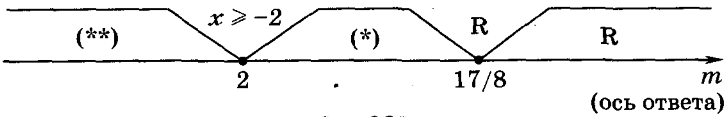


Рис. 382

№ 19. Решите неравенство $2^{|x-1|+b} \leqslant 2^{x+1}$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Переходим к равносильному неравенству

$|x-1| + b \leqslant x + 1$; $|x-1| - x \leqslant 1 - b$.

Решаем совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x - 1 - x \leqslant 1 - b; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ -x + 1 - x \leqslant 1 - b; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ 0 \cdot x \leqslant 2 - b; \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant b/2. \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Решаем систему (1): если $b \leqslant 2$, то $x \geqslant 1$. Если $b > 2$, то система (1) решений не имеет (ось (1) на рис. 383).

Решаем систему (2): если $b \geqslant 2$, то система (2) решений не имеет. Пусть $b < 2$. Тогда $x \in [b/2;\ 1)$ (ось (2) на рис. 383).

Объединим результаты на оси ответа (рис. 383).

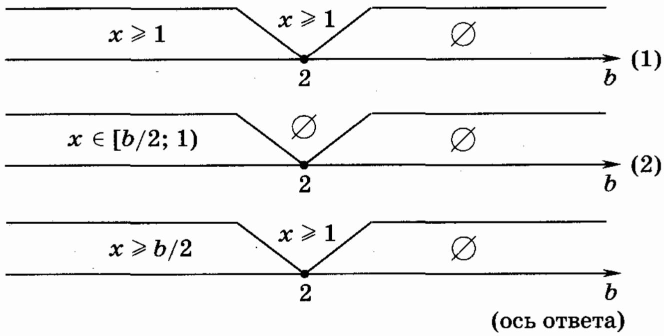


Рис. 383

Ответ: 1) Если $b \leqslant 2$, то $x \geqslant b/2$.
2) Если $b > 2$, то решений нет.

№ 20. Решите неравенство $5^{\sqrt{x-a}} \geqslant 5^{x-1}$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant a. \end{cases}$

Переходим к неравенству $\sqrt{x-a} \geqslant x-1$, а затем к совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x-1 \leqslant 0, \\ x-a \geqslant 0; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x-1 > 0, \\ x-a \geqslant (x-1)^2. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решаем каждую из систем:

(1): $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \geqslant a \end{cases}$ (ось (1) на рис. 385).

Если $a = 1$, то $x = 1$.

Если $a > 1$, то решений нет.
Если $a < 1$, то $x \in [a; 1]$

(2): $\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - 3x + a + 1 \leqslant 0. \end{cases}$

Найдем дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 3x + a + 1$: $D = 5 - 4a$.

1) Пусть $D < 0$, т. е. $a > 5/4$. Система (2) решений не имеет.

2) $D = 0$, $a = 5/4$, тогда $x = 3/2$.

3) $D > 0$, $a < 5/4$. Находим корни квадратного трехчлена: $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5 - 4a}}{2}$, $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{5 - 4a}}{2}$.

Решаем квадратное неравенство, построив схематично график квадратного трехчлена (рис. 384).

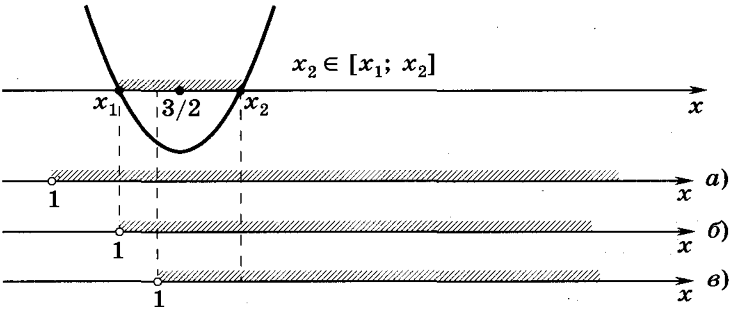


Рис. 384

Рассматриваем три возможных случая расположения $x = 1$.

а) Пусть $1 < x_1$ (ось *а* на рис. 384):

$$1 < \frac{3 - \sqrt{5 - 4a}}{2},\ \sqrt{5 - 4a} < 1,\ \begin{cases} a < \frac{5}{4}, \\ a > 1, \end{cases} a \in \left(1; \frac{5}{4}\right).$$

Тогда $x \in [x_1; x_2]$.

б) Если $x_1 = 1$ (ось *б* на рис. 384), то $a = 1$: $x \in (1; 2]$.

в) Пусть $1 > x_1$ (ось *в* на рис. 384). В этом случае $a < 1$, $x \in (1; x_2]$.

Заполняем ось (2) на рис. 385 и объединяем решения на оси ответа.

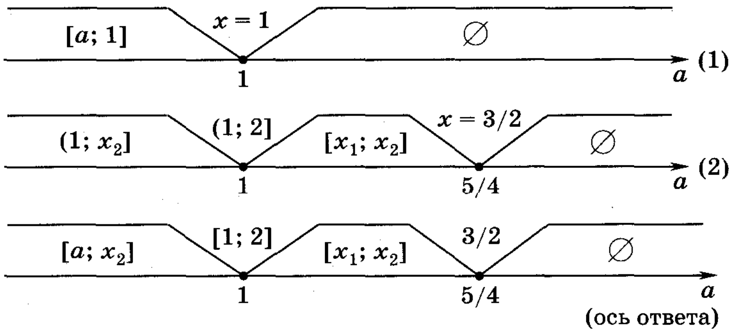


Рис. 385

Ответ: 1) Если $a \leqslant 1$, то $x \in \left[a; \dfrac{3+\sqrt{5-4a}}{2}\right]$.

2) Если $1 < a < 5/4$, то

$x \in \left[\dfrac{3-\sqrt{5-4a}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{5-4a}}{2}\right]$.

3) Если $a = 5/4$, то $x = 3/2$.

4) Если $a > 5/4$, то решений нет.

Неравенство $\sqrt{x-a} \geqslant x - 1$ можно решить и графически в системе координат (xOy).

Рассматриваем функции: $y = \sqrt{x-a}$ и $y = x - 1$ (рис. 386—390).

1) Пусть $a < 1$ (рис. 386).

$x \in [a; x_2]$.

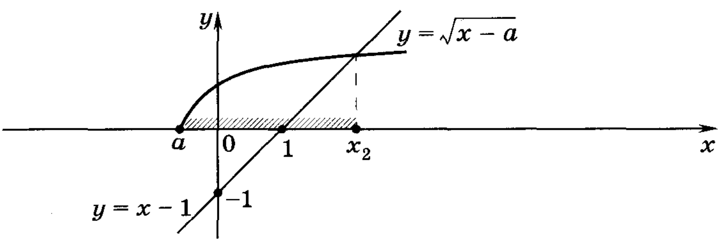


Рис. 386

2) $a = 1$ (рис. 387).

$x \in [1; 2]$.

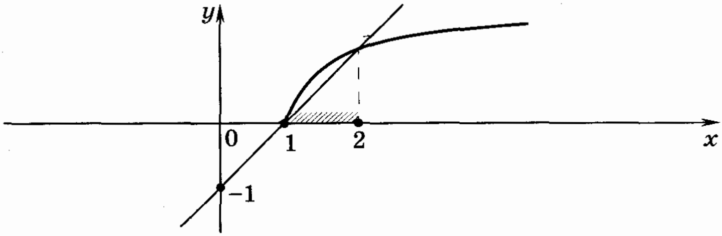


Рис. 387

3) $a = 5/4$ (рис. 388).

$x = 3/2$.

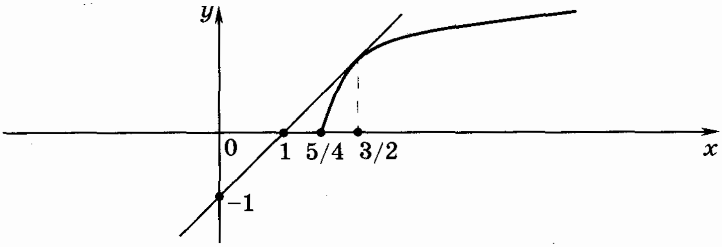


Рис. 388

4) $1 < a < 5/4$ (рис. 389).

$x \in [x_1; x_2]$.

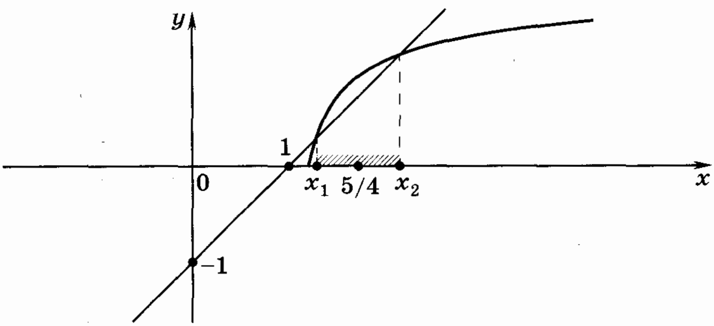


Рис. 389

5) $a > 5/4$ (рис. 390).

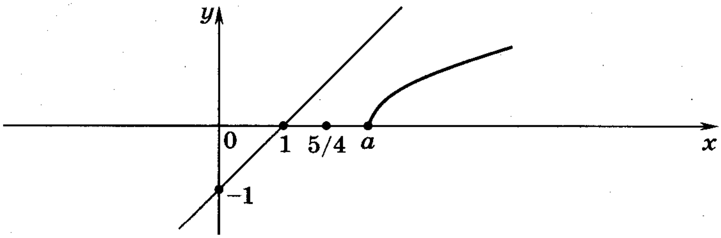


Рис. 390

В этом случае график функции $y = \sqrt{x - a}$ расположен ниже прямой $y = x - 1$. Поэтому данное неравенство решений не имеет.

№ 21. Решите неравенство $2^{(b-1)\cos x} > 4^{(b-3)/2}$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Переходим к неравенству $(b - 1)\cos x > b - 3$.

1) $b = 1$: $0 \cdot \cos x > -2$, $x \in R$.

2) $b > 1$: $\cos x > (b - 3)/(b - 1)$.

а) $(b - 3)/(b - 1) = 0$, $b = 3$: $\cos x > 0$,
$x \in (-\pi/2 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k)$, $k \in Z$. (*)

б) $(b - 3)/(b - 1) = -1$, $b = 2$: $\cos x > -1$,
$x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. (**)

в) $b > 3$, $0 < (b - 3)/(b - 1) < 1$ (рис. 391):
$x \in \left(-\arccos \dfrac{b-3}{b-1} + 2\pi m; \arccos \dfrac{b-3}{b-1} + 2\pi m\right)$,
$m \in Z$. (***)

г) $b \in (2; 3)$, $-1 < (b - 3)/(b - 1) < 0$ (рис. 392):
$x \in \left(-\arccos \dfrac{b-3}{b-1} + 2\pi m; \arccos \dfrac{b-3}{b-1} + 2\pi m\right)$,
$m \in Z$. (***)

д) $b \in (1; 2)$, $(b - 3)/(b - 1) < -1$: $x \in R$.

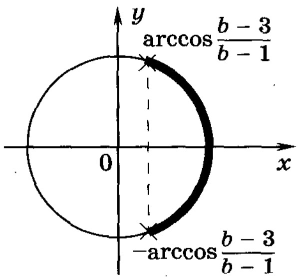


Рис. 391

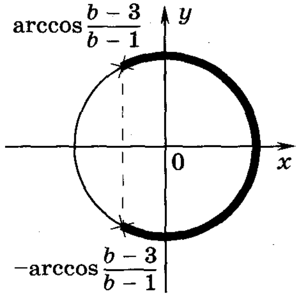


Рис. 392

3) $b < 1$, $(b-3)/(b-1) > 1$:
$\cos x < (b-3)/(b-1)$, $x \in \mathrm{R}$.
Заполняем ось ответа (рис. 393).

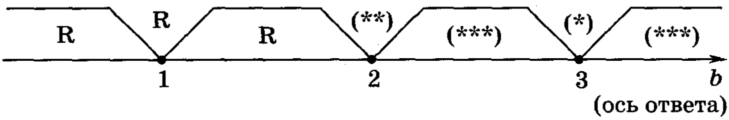


Рис. 393

Ответ: 1) Если $b \in (2; 3) \cup (3; +\infty)$,
то $x \in \left(-\arccos\frac{b-3}{b-1} + 2\pi m;\right.$
$\left.\arccos\frac{b-3}{b-1} + 2\pi m\right)$, $m \in \mathrm{Z}$.
2) Если $b = 2$, то $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.
3) Если $b = 3$, то $x \in (-\pi/2 + 2\pi k;$
$\pi/2 + 2\pi k)$, $k \in \mathrm{Z}$.
4) Если $b \in (-\infty; 2)$, то $x \in \mathrm{R}$.

№ 22. Решите неравенство $e^{(1-c)\sin x + 4c - 3} < e^{c^2}$, где $c > 0$.

Решение.
Достаточно решить систему неравенств
$$\begin{cases}(1-c)\sin x < (c-3)(c-1),\\ c > 0.\end{cases}$$
1) $c = 1$: $0 \cdot \sin x < 0$. Решений нет.
2) $0 < c < 1$: $\begin{cases}\sin x < 3 - c,\\ 0 < c < 1.\end{cases}$

Легко видеть, что если $0 < c < 1$, то $3 - c > 2$. Поэтому $x \in \mathrm{R}$.

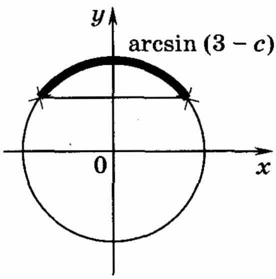


Рис. 394

3) $c > 1$: $\begin{cases} \sin x > 3 - c, \\ c > 1. \end{cases}$

а) $3 - c = -1$, $c = 4$:
$\sin x > -1$,
$x \neq -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. (*)

б) $3 - c = 1$, $c = 2$:
$\sin x > 1$, решений нет.

в) $3 - c = 0$, $c = 3$: $\sin x > 0$,
$x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathrm{Z}$. (**)

г) $1 < c < 2$, т. е. $1 < 3 - c < 2$.
Решений нет.

д) $2 < c < 3$, т. е.
$0 < 3 - c < 1$ (рис. 394):
$x \in (\arcsin(3 - c) + 2\pi m; \pi - \arcsin(3 - c) + 2\pi m)$,
$m \in \mathrm{Z}$. (***)

е) $3 < c < 4$, т. е.
$-1 < 3 - c < 0$:
$x \in (\arcsin(3 - c) + 2\pi m; \pi - \arcsin(3 - c) + 2\pi m)$,
$m \in \mathrm{Z}$. (***)

ж) $c > 4$, т. е. $3 - c < -1$. Тогда $x \in \mathrm{R}$.

Заполним ось ответа (рис. 395).

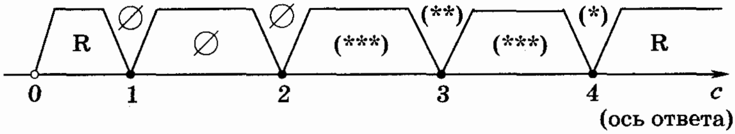


Рис. 395

<u>Ответ</u>: 1) Если $c \in (2; 3) \cup (3; 4)$,
то $x \in (\arcsin(3 - c) + 2\pi m;$
$\pi - \arcsin(3 - c) + 2\pi m)$, $m \in \mathrm{Z}$.
2) Если $c \in (0; 1) \cup (4; +\infty)$, то $x \in \mathrm{R}$.
3) Если $c = 3$, то $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathrm{Z}$.
4) Если $c = 4$, то $x \neq -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$.
5) Если $c \in [1; 2]$, то решений нет.

Неравенства для самостоятельного решения

1) $2^{(3-b)x} < \frac{1}{2}$.

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{(a-1)(a-2)x} > 1$.

3) $3^{\frac{(c-1)x}{c}} \geqslant 2$.

4) $10^{\frac{2-ax}{a-2}} < \frac{1}{10}$.

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{(m-1)x^2-m+3} < 10^{-\lg 2}$.

6) $(0{,}1)^{\frac{x^2-3bx}{6b+4}} \geqslant 0{,}1$.

7) $7^{(2-a)x^2-3x} \leqslant 100^{\lg 7}$.

8) $3^{|x+2|-b} \geqslant 9^{x-1}$.

9) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+a}} \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$.

10) $16^{(3-b)\sin x} \leqslant 4^{2-b}$.

11) $\left(\frac{1}{e}\right)^{(c-2)\cos x+5c-6} > \left(\frac{1}{e}\right)^{c^2}$, где $c \geqslant 0$.

3.3. Более сложные показательные неравенства с параметром

№ 1. Решите неравенство $a^{x+2} + 8a^{x-1} - 4/a > a - 2$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a > 0, a \neq 1, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

От данного неравенства переходим к равносильному: $a^3a^x + 8a^x - a^2 + 2a - 4 > 0$. Пусть $a^x = t$, где $t > 0$. Тогда $(a^3+8)\cdot t > a^2 - 2a + 4$. Учитывая, что $a^3 + 8 > 0$ при $a > 0$, $a \neq 1$, получаем неравенство $t > 1/(a+2)$.

1) $a > 1$: $a^x > 1/(a+2)$, $x > -\log_a(a+2)$.

2) $0 < a < 1$: $x < -\log_a(a+2)$.

Ответ: 1) Если $a > 1$, то $x > -\log_a(a+2)$.
2) Если $0 < a < 1$, то $x < -\log_a(a+2)$.

№ 2. Решите неравенство $\frac{a^x}{a^x - 1} > \frac{1 + a^{-x}}{1 - 2a^{-x}}$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a > 0,\ a \neq 1, \\ x \neq 0, \\ x \neq \log_a 2. \end{cases}$

Пусть $a^x = t$, где $t > 0$: $t/(t-1) > (1 + 1/t)/(1 - 2/t)$,

$t/(t-1) - (t+1)/(t-2) > 0$, $\begin{cases} \dfrac{1-2t}{(t-1)(t-2)} > 0, \\ t > 0 \text{ (рис. 396)}. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} t < 1/2, \\ 1 < t < 2, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a^x < 1/2, \\ 1 < a^x < 2. \end{array}\right.$

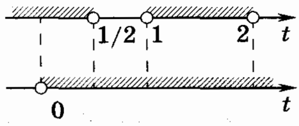


Рис. 396

1) $a > 1$: $\left[\begin{array}{l} x < -\log_a 2, \\ 0 < x < \log_a 2, \end{array}\right.$

$x \in (-\infty; -\log_a 2) \cup (0; \log_a 2)$.

2) $0 < a < 1$: $\left[\begin{array}{l} x > -\log_a 2, \\ \begin{cases} x < 0, \\ x > \log_a 2; \end{cases} \end{array}\right.$

$x \in (\log_a 2; 0) \cup (-\log_a 2; +\infty)$.

Ответ: 1) Если $a > 1$, то
$x \in (-\infty; -\log_a 2) \cup (0; \log_a 2)$.
2) Если $0 < a < 1$, то
$x \in (\log_a 2; 0) \cup (-\log_a 2; +\infty)$.

№ 3. Решите неравенство $a^2 - 9^{x+1} - 8a \cdot 3^x > 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Введем замену: $3^x = t$, $t > 0$. Решаем систему $\begin{cases} 9t^2 + 8at - a^2 < 0, \\ t > 0. \end{cases}$

$\mathrm{D}_1 = 25a^2$: $\left[\begin{array}{l} t_1 = -a, \\ t_2 = a/9 \end{array}\right.$ — корни квадратного трехчлена $9t^2 + 8at - a^2$.

Тогда имеем $\left[\begin{array}{l} (t+a)(y - a/9) < 0, \\ t > 0. \end{array}\right.$

1) $a = 0$: решений нет.

2) $a > 0$ (рис. 397).

$t < a/9,\ 3^x < a/9,\ x < \log_3 a - 2.$ (*)

3) $a < 0$ (рис. 398).

$3^x < -a,\ x < \log_3(-a).$ (**)

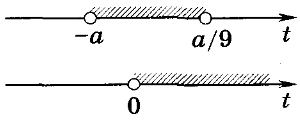


Рис. 397

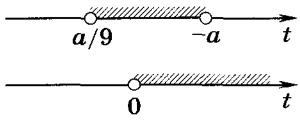


Рис. 398

Заполним ось ответа (рис. 399).

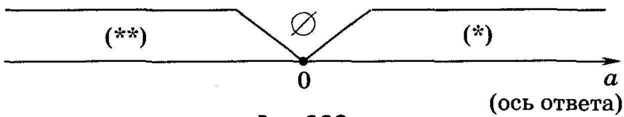


Рис. 399

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 400).

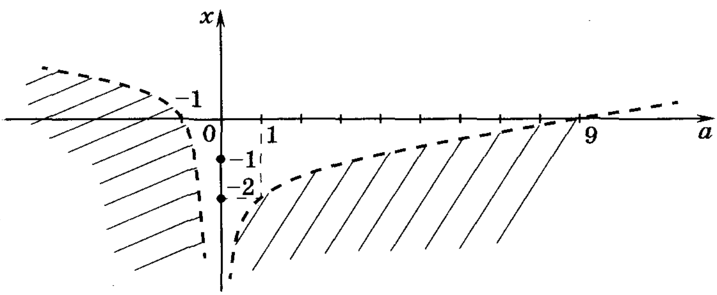


Рис. 400

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \in (0; +\infty)$, то $x < \log_3 a - 2$.
2) Если $a \in (-\infty; 0)$, то $x < \log_3(-a)$.
3) Если $a = 0$, то решений нет.

№ 4. Решите неравенство $(a+2)3^{\sqrt{x-1}} > a+1$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

Рассмотрим ряд случаев.

1) $a = -2$: $0 \cdot 3^{\sqrt{x-1}} > -1$, $x \geqslant 1$. (*)

2) $a > -2$: $3^{\sqrt{x-1}} > (a+1)/(a+2)$.

Учитывая, что $3^{\sqrt{x-1}} \geqslant 1$ при $x \geqslant 1$, сравним $(a+1)/(a+2)$ с 1: $(a+1)/(a+2) - 1 = -1/(a+2)$. Если $a > -2$, то $-1/(a+2) < 0$, а потому $(a+1)/(a+2) < 1$. Значит, если $a > -2$, то $x \geqslant 1$.

3) $a < -2$: $3^{\sqrt{x-1}} < (a+1)/(a+2)$.

Если $a < -2$, то $(a+1)/(a+2) > 1$:

$$\sqrt{x-1} < \log_3 \frac{a+1}{a+2},$$

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x < \log_3^2 \dfrac{a+1}{a+2} + 1, \end{cases}$$

$$x \in \left[1;\ \log_3^2 \frac{a+1}{a+2} + 1\right). \qquad (**)$$

Полученные решения наносим на ось ответа (рис. 401).

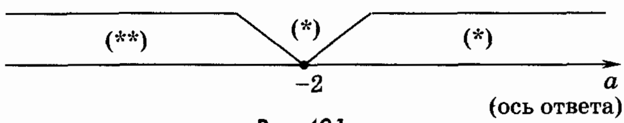


Рис. 401

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \geqslant -2$, то $x \in [1; +\infty)$.

2) Если $a < -2$, то $x \in \left[1;\ \log_3^2 \dfrac{a+1}{a+2} + 1\right)$.

№ 5. Решите неравенство $7^{\frac{(a-5)x}{a+4}} \leqslant (a-3)/(a+2)$.

<u>Решение.</u>

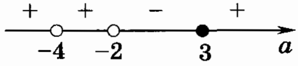


Рис. 402

ООН: $\begin{cases} a \neq -4, \\ a \neq -2, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Определим знак выражения $\dfrac{a-3}{a+2}$ (рис. 402).

А теперь рассмотрим ряд случаев.

1) $a \in (-2; 3]$: решений нет.

2) $a \in (-\infty; -4) \cup (-4; -2) \cup (3; +\infty)$.

$\dfrac{(a-5)x}{a+4} \leqslant \log_7 \dfrac{a-3}{a+2}$.

а) $\dfrac{a-5}{a+4} > 0$ (рис. 403): $a \in (-\infty; -4) \cup (5; +\infty)$.

В этом случае $x \leqslant \dfrac{a+4}{a-5} \log_7 \dfrac{a-3}{a+2}$. (*)

б) $a = 5$: $0 \cdot x \leqslant \log_7 \dfrac{2}{7}$. Решений нет.

в) $\dfrac{a-5}{a+4} < 0$ (рис. 404): $a \in (-4; -2) \cup (3; 5)$,

$x \geqslant \dfrac{a+4}{a-5} \log_7 \dfrac{a-3}{a+2}$. (**)

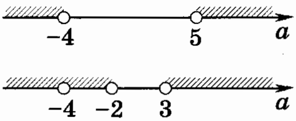


Рис. 403

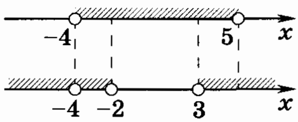
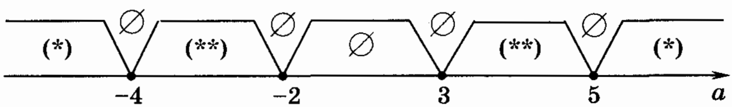


Рис. 404

Заполняем ось ответа (рис. 405).



(ось ответа)

Рис. 405

Ответ: 1) Если $a \in (-\infty; -4) \cup (5; +\infty)$,

то $x \leqslant \dfrac{a+4}{a-5} \log_7 \dfrac{a-3}{a+2}$.

2) Если $a \in (-4; -2) \cup (3; 5)$,

то $x \geqslant \dfrac{a+4}{a-5} \log_7 \dfrac{a-3}{a+2}$.

3) В остальных случаях решений нет.

№ 6. Решите неравенство $(1/4)^{(a-1)/x} \geqslant a+1$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \neq 0. \end{cases}$

1) $a \in (-\infty; -1]$: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. (A)

2) $a > -1$: $\dfrac{a-1}{x} \leqslant \log_{1/4}(a+1)$,

$$\frac{a-1-x\log_{1/4}(a+1)}{x} \leqslant 0.$$

Переходим к равносильной совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ a-1+x\log_4(a+1) \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x>0, \\ a-1+x\log_4(a+1) \leqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x\log_4(a+1) \geqslant 1-a, \\ x<0, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x\log_4(a+1) \leqslant 1-a, \\ x>0. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Далее учтем, что $\log_4(a+1)$ принимает на промежутках $(-1; 0)$ и $(0; +\infty)$ значения разных знаков (рис. 406).

а) Пусть $a \in (-1; 0)$.

Решаем каждую из систем совокупности.

(1): $\begin{cases} x \leqslant \dfrac{1-a}{\log_4(a+1)}, \\ x < 0 \text{ (рис. 407).} \end{cases}$

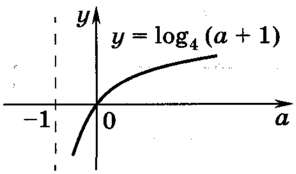


Рис. 406

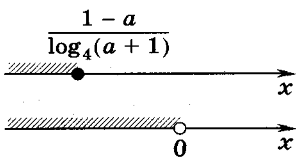


Рис. 407

Тогда $x \leqslant \dfrac{1-a}{\log_4(a+1)}$.

$$(2): \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1-a}{\log_4(a+1)}, \\ x > 0 \text{ (рис. 408).} \end{cases}$$

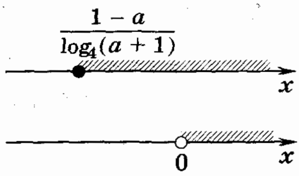


Рис. 408

Отсюда $x > 0$.
Итак, если

$$a \in (-1; 0), \text{ то } x_2 \in \left(-\infty; \frac{1-a}{\log_4(a+1)}\right] \cup (0; +\infty).$$

б) $a = 0$: $\dfrac{-1 + x \cdot 0}{x} \leqslant 0$, $1/x \geqslant 0$, $x_3 > 0$.

в) $a \in (0; 1)$.
Решаем каждую из систем.

$$(1): \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1-a}{\log_4(a+1)}, \\ x < 0 \text{ (рис. 409).} \end{cases}$$

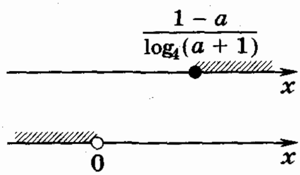


Рис. 409

Система (1) решений не имеет.

$$(2): \begin{cases} x \leqslant \dfrac{1-a}{\log_4(a+1)}, \\ x > 0 \text{ (рис. 410).} \end{cases}$$

$x_4 \in \left(0; \dfrac{1-a}{a+1}\right]$.

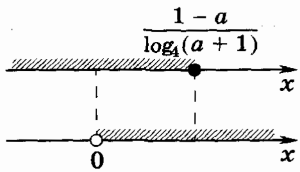


Рис. 410

г) $a = 1$: $(1/4)^{0/x} \geqslant 2$. Данное неравенство решений не имеет.

д) $a > 1$:

$$(1): \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1-a}{\log_4(a+1)}, \\ x < 0 \text{ (рис. 411).} \end{cases}$$

$x_5 \in \left[\dfrac{1-a}{\log_4(a+1)}; 0\right)$.

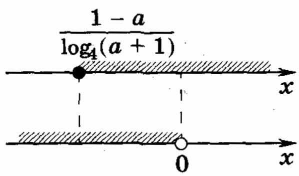


Рис. 411

(2): $\begin{cases} x \leqslant \dfrac{1-a}{\log_4(a+1)}, \\ x > 0 \text{ (рис. 412).} \end{cases}$

Система (2) решений не имеет.

Заполняем ось ответа (рис. 413).

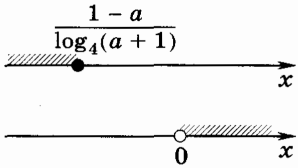


Рис. 412

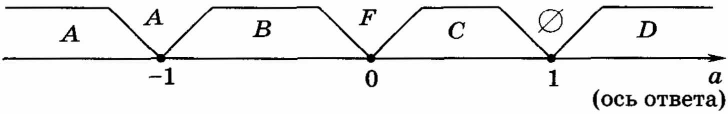


Рис. 413

Ответ: 1) Если $a \in (-\infty; -1]$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) Если $a \in (-1; 0)$,

то $x \in \left(-\infty; \dfrac{1-a}{\log_4(a+1)}\right] \cup (0; +\infty)$.

3) Если $a = 0$, то $x \in (0; +\infty)$.

4) Если $a \in (0; 1)$, то $x \in \left(0; \dfrac{1-a}{\log_4(a+1)}\right]$.

5) Если $a = 1$, то решений нет.

6) Если $a \in (1; +\infty)$,

то $x \in \left[\dfrac{1-a}{\log_4(a+1)}; 0\right)$.

№ 7. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leqslant 0$ имеет решения.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Введем замену $2^x = t$, $t > 0$; $t^2 - at - a + 3 \leqslant 0$. Нам надо найти такие значения a, при которых квадратное неравенство имеет хотя бы одно положительное решение. Рассмотрим ряд случаев расположения парабол $y = t^2 - at - a + 3$.

1) Рис. 414.

В этом случае $y(0) < 0$: $-a + 3 < 0$, $a > 3$.

2) Рис. 415 или рис. 416.

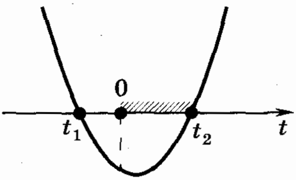


Рис. 414

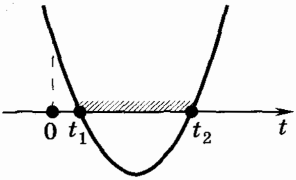


Рис. 415

$$\begin{cases} y(0) > 0, \\ \mathrm{D} \geqslant 0, \\ -\dfrac{B}{2A} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 - a > 0, \\ a^2 + 4a - 12 \geqslant 0, \\ a/2 > 0, \end{cases} \; a \in [2; 3).$$

3) Рис. 417. $t_1 = 0$. Тогда $a = 3$. При этом $t_2 = 3$.

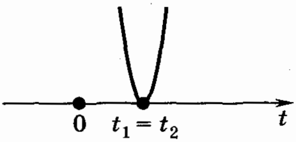


Рис. 416

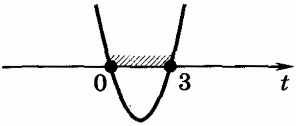


Рис. 417

Ответ: $a \in [2; +\infty)$.

№ 8. Решите неравенство $144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a \geqslant 0$.

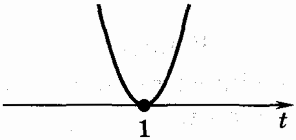
Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Пусть $12^{|x|} = t$, где $t \geqslant 1$: $t^2 - 2t + a \geqslant 0$. Заметим, что абсцисса вершины параболы $y = t^2 - 2t + a$ равна 1.

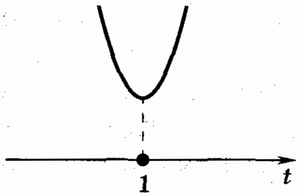
Тогда рассмотрим только три случая расположения парабол.

1) Рис. 418 и рис. 419.



$D_1 = 0$

Рис. 418



$D_1 < 0$

Рис. 419

Решаем неравенство $D_1 \leqslant 0$: $1 - a \leqslant 0$, $a \geqslant 1$. Получаем $x \in R$.

2) Рис. 420.

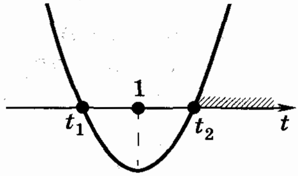
В этом случае $t_2 > 1$. Тогда

$t \geqslant t_2$, где $t_2 = 1 + \sqrt{1 - a}$.

Решаем неравенство

$12^{|x|} \geqslant 1 + \sqrt{1 - a}$:

$|x| \geqslant \log_{12}(1 + \sqrt{1 - a})$ (рис. 421). (*)



$D > 0$, $a < 1$

Рис. 420

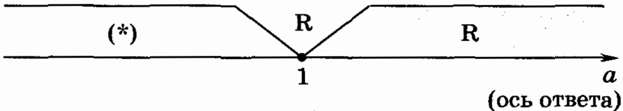


Рис. 421

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \in [1; +\infty)$, то $x \in R$.
2) Если $a \in (-\infty; 1)$,
то $|x| \geqslant \log_{12}(1 + \sqrt{1 - a})$.

№ 9. При каких значениях c неравенство

$5(c + 1)9^x - 10 \cdot 3^x + c - 3 > 0$

выполняется при всех значениях x?

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} c \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Пусть $3^x = t$, где $t > 0$. Тогда получим неравенство $5(c+1)t^2 - 10 \cdot t + c - 3 > 0$.

1) $c = -1$: $-10t - 4 > 0$, $t < -2/5$. Решений нет.

2) $c \neq -1$. Тогда неравенство относительно t является неравенством второй степени.

Рассмотрим ряд интересующих нас случаев.

а) $\begin{cases} D_1 < 0 \text{ (рис. 422)}, \\ c > -1, \text{ где } D_1 = -5c^2 + 10c + 40. \end{cases}$

$\begin{cases} c^2 - 2c - 8 > 0, \\ c > -1 \text{ (рис. 423)}, \end{cases}$ $c > 4$.

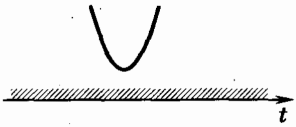


Рис. 422

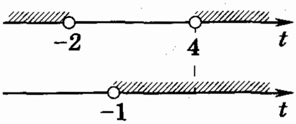


Рис. 423

б) $\begin{cases} D_1 = 0, \\ c > -1 \text{ (рис. 424)}, \end{cases}$ $c = 4$.

Неравенство $(5t-1)^2 > 0$ выполняется не при всех значениях $t > 0$.

в) $\begin{cases} D_1 > 0, \\ c > -1 \text{ (рис. 425)}. \end{cases}$

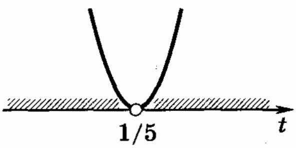


Рис. 424

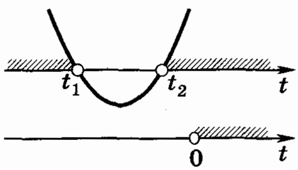


Рис. 425

$t_2 \leqslant 0$: $\begin{cases} \dfrac{5 + \sqrt{-5c^2 + 10c + 40}}{5(c+1)} \leqslant 0, \\ c > -1. \end{cases}$ Эта система решений не имеет. Значит, случай в) тоже невозможен.

<u>Ответ</u>: $c > 4$.

№ 10. При каких значениях m неравенство

$$4^{\cos x} - 2(m-3)\cdot 2^{\cos x} + m + 3 > 0$$

выполняется при всех действительных значениях x?

Решение.

ООН: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Пусть $2^{\cos x} = t$, где $t \in [1/2;\ 2]$. Получим систему неравенств $\begin{cases} t^2 - 2(m-3)t + m + 3 > 0, \\ 1/2 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$

Найдем D_1 квадратного трехчлена, стоящего в левой части квадратного неравенства:

$D_1 = m^2 - 7m + 6 = (m-1)(m-6)$.

Рассмотрим ряд интересующих нас случаев.

1) $D_1 < 0$: $1 < m < 6$.

2) $D_1 = 0$: $m = 1$: $(t+2)^2 > 0$.

$m = 6$: $(t-3)^2 > 0$.

3) $D_1 > 0$ (рис. 426 и 427).

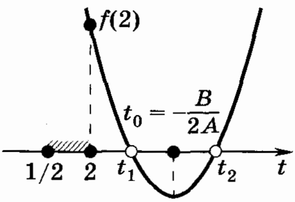


Рис. 426

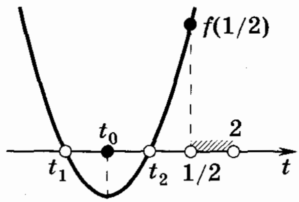


Рис. 427

Сначала рассмотрим рис. 426.

$$\begin{cases} f(2) > 2, \\ -\dfrac{B}{2A} > 2, \\ D_1 > 0, \end{cases} \qquad \text{где } f(t) = t^2 - 2(m-3)t + m + 3.$$

$$\begin{cases} 4 - 4(m-3) + m + 3 > 0, \\ m - 3 > 2, \\ (m-1)(m-6) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} m < 19/3, \\ m > 5, \\ (m-1)(m-6) > 0, \end{cases} \qquad 6 < m < 19/3.$$

Теперь рассмотрим рис. 427.

$$\begin{cases} m - 3 < 1/2, \\ (m-1)(m-6) > 0, \\ f(1/2) > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m < 3\frac{1}{2}, \\ (m-1)(m-6) > 0, \\ 1/4 - m + 3 + m + 3 > 0, \end{cases} \qquad m < 1.$$

Ответ: $m < 19/3$.

№ 11. При каких значениях b неравенство

$(b+2) \cdot 4^{|x-1|} - 2b \cdot 2^{|x-1|} + 3b + 1 > 0$

выполняется при всех действительных значениях x?

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Пусть $2^{|x-1|} = t$, где $t \geqslant 1$. Получим неравенство $(b+2) \cdot t^2 - 2b \cdot t + 3b + 1 > 0$.

1) $b = -2$: $4t - 5 > 0$, $t > 5/4$. Этот случай нас не устраивает, так как $2^{|x-1|} > 5/4$ не для любого x.

2) $b \neq -2$. Рассматриваем неравенство второй степени.

а) $\begin{cases} \mathrm{D}_1 < 0 \text{ (рис. 428)}, \\ b > -2, \text{ где } \mathrm{D}_1 = -2b^2 - 7b - 2. \end{cases}$

$$\begin{cases} -2b^2 - 7b - 2 < 0, \\ b > -2; \end{cases}$$

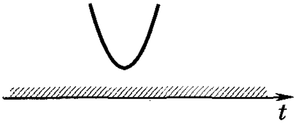


Рис. 428

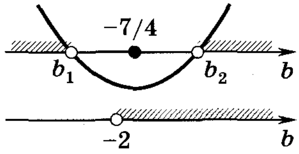


Рис. 429

$$\begin{cases} 2b^2 + 7b + 2 > 0, \\ b > -2 \text{ (рис. 429)}, \end{cases}$$

$$b > \frac{-7 + \sqrt{33}}{4}.$$

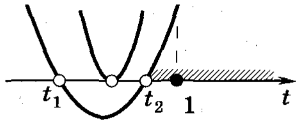


Рис. 430

б) Рассмотрим рис. 430.

$f(t) = (b + 2)t^2 - 2bt + 3b + 1.$

$$\begin{cases} f(1) > 0, \\ -\dfrac{B}{2A} < 1, \\ D_1 \geqslant 0, \\ b > -2, \end{cases} \quad \begin{cases} b + 2 - 2b + 3b + 1 > 0, \\ \dfrac{b}{b+2} < 1, \\ 2b^2 + 7b + 2 \leqslant 0, \\ b > -2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b > -3/2, \\ -\dfrac{2}{b+2} < 0, \\ 2b^2 + 7b + 2 \leqslant 0, \\ b > -2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b > -3/2, \\ b > -2, \\ (-7 - \sqrt{33})/4 \leqslant b \leqslant (-7 + \sqrt{33})/4, \end{cases}$$

$-3/2 < b \leqslant (-7 + \sqrt{33})/4.$

Ответ: $b > -\dfrac{3}{2}$.

№ 12. При каких значениях a неравенство

$9^x < 20 \cdot 3^x + a$

не имеет ни одного целочисленного решения?

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in Z, \\ x \in R. \end{cases}$

Сначала решим данное неравенство. Пусть $3^x = t$, $t > 0$: $t^2 - 20t - a < 0$, $D_1 = 100 + a$.

1) $D_1 \leqslant 0$, $a \leqslant -100$. Решений нет.

2) $D_1 > 0$ (рис. 431), $a > -100$:

$10 - \sqrt{100 + a} < t < 10 + \sqrt{100 + a}$.

Рассмотрим три случая, представленные на рис. 431.

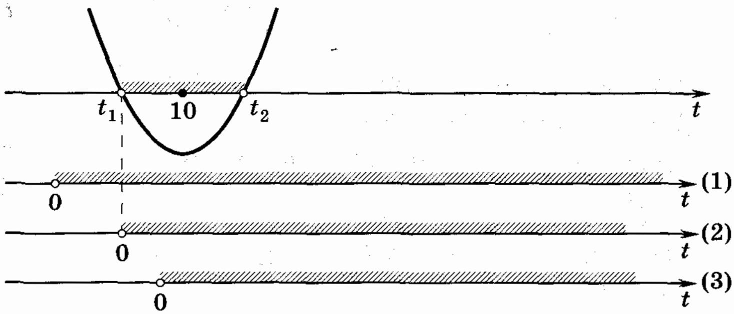


Рис. 431

(1): $10 - \sqrt{100 + a} > 0$; $10 > \sqrt{100 + a}$, $\begin{cases} a > -100, \\ a < 0. \end{cases}$

Решаем двойное неравенство

$$10 - \sqrt{100 + a} < 3^x < 10 + \sqrt{100 + a}.$$

$$\log_3 (10 - \sqrt{100 + a}) < x < \log_3 (10 + \sqrt{100 + a}),$$

$$x \in (\log_3 (10 - \sqrt{100 + a}); \log_3 (10 + \sqrt{100 + a})). \ (*)$$

(2): $10 - \sqrt{100 + a} = 0$; $a = 0$: $3^x < 20$,

$x < \log_3 20$. (**)

(3): $f(0) < 0$, где $f(t) = t^2 - 20t - a$: $a > 0$,

$3^x < 10 + \sqrt{100 + a}$, $x < \log_3 (10 + \sqrt{100 + a})$. (***)

А теперь проанализируем полученные множества решений.

1. $x < \log_3 20$, т. е. $x \in (-\infty; \log_3 20)$. В этом множестве значений x есть целочисленные. Это числа: 2, 1, 0, –1, … .

2. Если $a > 0$, то тоже есть целочисленные решения.

3. Пусть $a \in (-100; 0)$. Рассмотрим двойное неравенство $10 - \sqrt{100 + a} < 3^x < 10 + \sqrt{100 + a}$.

Если $a \in (-100;\ 0)$, то $0 < 10 - \sqrt{100 + a} < 10$, $10 < 10 + \sqrt{100 + a} < 20$. Поэтому двойное неравенство может иметь в качестве целого решения только $x = 2$. Условием отсутствия целочисленных x будет выполнение неравенства $10 - \sqrt{100 + a} \geqslant 9$: $\sqrt{100 + a} \leqslant 1$, $a \leqslant -99$. Значит, $a \in (-100;\ -99]$. Заметим, что интервал $(-\infty;\ -100]$ также входит в ответ (рис. 432).

Рис. 432

Ответ: $(-\infty;\ -99]$.

№ 13. Найдите интервалы монотонного убывания функции $f(x) = 6 - (4c + 3) \cdot (1/5)^x + (c - 7) \cdot 5^x$.

Решение.

Область определения функции

$$D(f): \begin{cases} c \in R, \\ x \in R. \end{cases}$$

$f'(x) = (4c + 3) \cdot (1/5)^x \ln 5 + (c - 7) \cdot 5^x \ln 5$.

Решим неравенство

$(4c + 3) \ln 5/5^x + (c - 7) \cdot 5^x \ln 5 \leqslant 0$.

Учитывая, что $\ln 5 > 0$ и $5^x > 0$, переходим к неравенству $4c + 3 + 5^{2x} \cdot (c - 7) \leqslant 0$; $(7 - c) \cdot 5^{2x} \geqslant 4c + 3$. Рассмотрим ряд случаев.

1) $c \leqslant -3/4$: $5^{2x} \geqslant (4c + 3)/(7 - c)$. Заметим, что $(4c + 3)/(7 - c) \leqslant 0$, если $c \leqslant -3/4$. Поэтому $x \in R$.

2) $-3/4 < c < 7$, $(4c + 3)/(7 - c) > 0$:

$$2x \geqslant \log_5 \frac{4c + 3}{7 - c}, \quad x \geqslant \log_5 \sqrt{(4c + 3)(7 - c)}.$$

3) $c > 7$: $5^{2x} \leqslant (4c + 3)/(7 - c)$. В этом случае $(4c + 3)/(7 - c) < 0$, а потому неравенство решений не имеет.

Ответ: 1) Если $c \leqslant -3/4$, то функция убывает на R.
2) Если $-3/4 < c < 7$, то функция убывает на множестве $[\log_5 \sqrt{(4c + 3)/(7 - c)}; +\infty)$.
3) При остальных значениях c интервалов убывания данной функции нет.

№ 14. При каких значениях параметра a функция $f(x) = 1 - 2 \cdot e^x + (1 - a)e^{-x} - e^{2x} + (a - 1)x$ монотонно убывает на всей числовой оси?

Решение.

Функция дифференцируема на множестве всех действительных чисел:

$f'(x) = -2e^x - (1 - a)/e^x - 2e^{2x} + a - 1$.

Решаем неравенство $f'(x) \leqslant 0$:

$-2e^{2x} - 1 + a - 2e^{3x} + e^x(a - 1) \leqslant 0$,

$2 \cdot e^{3x} + 2 \cdot e^{2x} - (a - 1)e^x + 1 - a \geqslant 0$.

Пусть $e^x = t$, где $t > 0$.

$2t^3 + 2t^2 + (1 - a)t + 1 - a \geqslant 0$,

$2t^2(t + 1) + (1 - a)(t + 1) \geqslant 0$,

$(t + 1) \cdot (2t^2 + 1 - a) \geqslant 0$, $2t^2 + 1 - a \geqslant 0$, $2t^2 \geqslant a - 1$, $t^2 \geqslant (a - 1)/2$. Последнее неравенство верно при любом значении t, если $a - 1 \leqslant 0$, т. е. $a \leqslant 1$.

Ответ: $a \leqslant 1$.

№ 15. При каких значениях a система $\begin{cases} x^2 + a^2 + a^6 \leqslant 2a^4, \\ 3^{ax + 2x} - 3^{-a} \geqslant 0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение.

ООС: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Первое неравенство системы легко представляется в виде $x^2 + a^2(a^2 - 1)^2 \leqslant 0$. Этому неравенству удовлетворяют только следующие пары $(a;\ x)$: $(0;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $(-1;\ 0)$.

Второе неравенство системы равносильно неравенству $ax + 2x > -a$; $x(a + 2) > -a$. А ему удовлетворяют только пары $(0;\ 0)$, $(1;\ 0)$.

Ответ: 0; 1.

Упражнения для самостоятельного решения

1) Решите неравенство $\dfrac{b^{-x} - 1}{1 - 2b^{-x}} < \dfrac{4 + b^x}{3 - b^x}$, $b > 0, b \neq 1$.
2) Решите неравенство $(b - 1) \cdot 2^{\sqrt{1 - x}} < b$.
3) Решите неравенство $2^{(c+3)x/(c-4)} \geqslant \dfrac{c - 2}{c + 1}$.
4) Решите неравенство $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$.
5) Найдите значения m, при которых неравенство $25^x - 2(m - 1)5^x + 4m - 7 \leqslant 0$ имеет решения.
6) При каких значениях d неравенство

   $3(d - 1)4^x - 6 \cdot 2^x + 5 - d < 0$

   выполняется при всех значениях x?
7) При каких значениях m неравенство

   $m \cdot 9^{\sin x} - 2(m - 2) \cdot 3^{\sin x} + 2m - 1 < 0$

   выполняется при всех действительных значениях x?
8) При каких значениях a неравенство

   $(1 - a) \cdot 9^{|x-2|} + 2a \cdot 3^{|x-2|} + 2a > 0$

   выполняется при всех действительных значениях x?
9) Найдите интервалы монотонного возрастания функции $f(x) = (c - 3)5^x - (3c + 4)(1/5)^x + 7$.
10) При каких значениях b функция

   $f(x) = -e^x + (b - 1)e^{-x} + (b - 1)x$

   убывает на всей числовой оси?

4. Логарифмические уравнения с параметром

4.1. Подготовительные уравнения

№ 1. Найдите область определения уравнения

$\lg(x^2 + a^2) = a$.

Решение.

Учитывая, что областью определения логарифмической функции $y = \log_a t$, где $a > 0$, $a \neq 1$, является множество положительных действительных чисел, достаточно решить неравенство $x^2 + a^2 > 0$. Легко видеть, что любая пара значений x и a, кроме (0; 0), удовлетворяет этому неравенству.

№ 2. Найдите область определения уравнения

$\lg(-x^2 + x - 1) = a + 1$.

Решение.

Квадратный трехчлен $-x^2 + x - 1$ принимает только отрицательные значения. Значит, ни одна пара значений x и a не является допустимой.

№ 3. Найдите область определения уравнения

$\ln(1 - \sin bx) = 3$.

Решение.

$1 - \sin bx > 0$, $\sin bx < 1$. Значит, надо исключить такие пары значений x и b, при которых $\sin bx = 1$. Решаем это уравнение: $bx = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$.

1) Если $b = 0$, то решений нет.

2) Если $b \neq 0$, то $x = \frac{1}{b}(\pi/2 + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Ответ: $\begin{cases} b \neq 0, \\ x \neq \frac{1}{b}(\pi/2 + 2\pi k), \ k \in Z; \end{cases}$ $\begin{cases} b = 0, \\ x \in R. \end{cases}$

№ 4. Найдите область определения уравнения

$\sqrt{\lg(1 + (x - b)^2)} = 4 + b$.

Решение.

Воспользуемся тем, что логарифмическая функция $y = \log_a t$, где $a > 1$, принимает неотрицательные значения, если $t \geqslant 1$. Поэтому достаточно увидеть, что неравенство $1 + (x - b)^2 \geqslant 1$ верно при любых парах значений x и b.

Ответ: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

№ 5. Найдите область определения уравнения

$$\sqrt{\log_{1/3}(1 + |x + c|)} = c.$$

Решение.

Решаем неравенство $1 + |x + c| \leqslant 1$, откуда $|x + c| \leqslant 0$, т. е. $x + c = 0$.

Ответ: $\begin{cases} x = -c, \\ c \in \mathrm{R}. \end{cases}$

№ 6. Найдите область определения уравнения

$$\sqrt{\lg(\cos ax)} = a^2 - a.$$

Решение.

Достаточно решить неравенство $\lg(\cos ax) \geqslant 0$: $\cos ax \geqslant 1$, $\cos ax = 1$, $ax = 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$.

1) $\begin{cases} a = 0, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a \neq 0, \\ x = 2\pi k/a/k \in \mathrm{Z}. \end{cases}$

№ 7. Найдите область определения уравнения

$\lg(\arccos(dx)) = d.$

Решение.

Решаем неравенство $\arccos(dx) > 0$; $-1 \leqslant dx < 1$.

1) Если $d = 0$, то $x \in \mathrm{R}$.

2) Пусть $d > 0$: $-1/d \leqslant x < 1/d$.

3) $d < 0$: $1/d < x \leqslant -1/d$.

Ответ: 1) $\begin{cases} d = 0, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} d > 0, \\ x \in [-1/d; 1/d). \end{cases}$

3) $\begin{cases} d < 0, \\ x \in (1/d; -1/d]. \end{cases}$

№ 8. Найдите область определения уравнения
$\lg(\arcsin(cx^2)) = c - 1$.

Решение.

Решим неравенство $\arcsin(cx^2) > 0$, которое сводится к системе $\begin{cases} cx^2 > 0, \\ cx^2 \leqslant 1. \end{cases}$

1) $c = 0$. Нет решений.

2) $c > 0$: $0 < x^2 \leqslant 1/c$, $x \in [-\sqrt{1/c}\,; 0) \cup (0; \sqrt{1/c}\,]$.

3) $c < 0$. Решений нет.

Ответ: $\begin{cases} c > 0, \\ x \in [-\sqrt{1/c}\,; 0) \cup (0; \sqrt{1/c}\,]. \end{cases}$

№ 9. Решите уравнение $\log_3(-a^2x^2) = \sin(ax)$.

Решение.

Найдем сначала область определения уравнения: $a^2x^2 < 0$. Ни одна пара значений x и a не входит в область определения уравнения. Поэтому решений нет.

№ 10. Решите уравнение $\lg(ax) = 0$.

Решение.

В этом случае находить область определения уравнения не обязательно. Достаточно воспользоваться определением логарифма и решить уравнение $ax = 1$.

1) Если $a = 0$, то решений нет.

2) Если $a \neq 0$, то $x = 1/a$.

№ 11. Решите уравнение $\log_a((1 - a)\sqrt{x}\,) = 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ x > 0. \end{cases}$

Решаем уравнение $(1 - a)\sqrt{x} = a$, равносильное в области определения данному.

$\sqrt{x} = a/(1 - a)$, $x = (a/(1 - a))^2$.

Ответ: 1) Если $a \in (0; 1)$, то $x = (a/(1-a))^2$.
2) Если $a \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$, то решений нет.

№ 12. Решите уравнение $\log_3(|ax| + 1) = -2$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

Заметим, что $|ax| + 1 \geqslant 1$, значит, $\log_3(|ax| + 1) \geqslant 0$. Потому данное уравнение решений не имеет ни при каком $a \in \mathrm{R}$.

№ 13. Решите уравнение $\log_5(|dx| + 1) = 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} x \in \mathrm{R}, \\ d \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$|dx| + 1 = 5,\ |dx| = 4,\ \left[\begin{array}{l} dx = 4, \\ dx = -4. \end{array}\right.$

1) Если $d = 0$, то решений нет.

2) Если $d \neq 0$, то $x = \pm 4/d$.

№ 14. Решите уравнение $\log_{1/2}(2 + \sqrt{ax}) = x^2 + 3x + 4$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ ax \geqslant 0. \end{cases}$

Выражение $x^2 + 3x + 4$ принимает только положительные значения при любых $x \in \mathrm{R}$. Левая же часть уравнения меньше 0, так как $2 + \sqrt{ax} > 1$. Значит, решений нет.

Ответ: решений нет ни при каком значении a.

№ 15. Решите уравнение $a \cdot \log_2(ax - 2x + 1) = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} (a-2)x + 1 > 0, \\ a \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $a = 0$: тогда уравнению удовлетворяет любое решение неравенства $-2x + 1 > 0$, т. е. $x < 1/2$.

2) $a \neq 0$: $\log_2(ax - 2x + 1) = 0$, $(a - 2)x + 1 = 1$, $(a - 2)x = 0$.

а) Если $a = 2$, то $x \in \mathrm{R}$.

б) Если $a \neq 2$, то $x = 0$.

Заполним ось ответа (рис. 433).

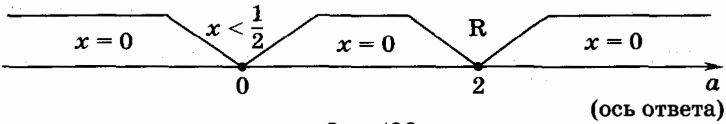


Рис. 433

Ответ: 1) Если $a = 0$, то $x < 1/2$.
2) Если $a = 2$, то $x \in \mathrm{R}$.
3) Если $a \neq 0$, $a \neq 2$, то единственный корень $x = 0$.

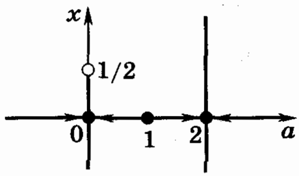


Рис. 434

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 434).

№ 16. Решите уравнение $(x - m)\log_3(mx - 4) = 0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} mx > 4, \\ m \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) $x_1 = m$.

Исследование.

$m^2 > 4$, $|m| > 2$.

Если $|m| \leqslant 2$, то $x_1 = m$ не является решением данного уравнения.

2) $\log_3(mx - 4) = 0$: $mx - 4 = 1$, $mx = 5$.

а) Если $m = 0$, то решений нет.

б) Если $m \neq 0$, то $x_2 = 5/m$.

Заполним ось ответа (рис. 435).

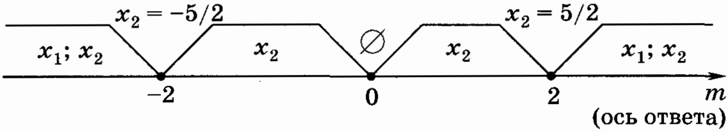


Рис. 435

Ответ: 1) Если $|m|>2$, то $x_1=m$, $x_2=5/m$.
2) Если $m\in[-2;\,0)\cup(0;\,2]$, то $x_2=5/m$.
3) Если $m=0$, то решений нет.

Проиллюстрируем ответ в системе координат (mOx) (рис. 436).

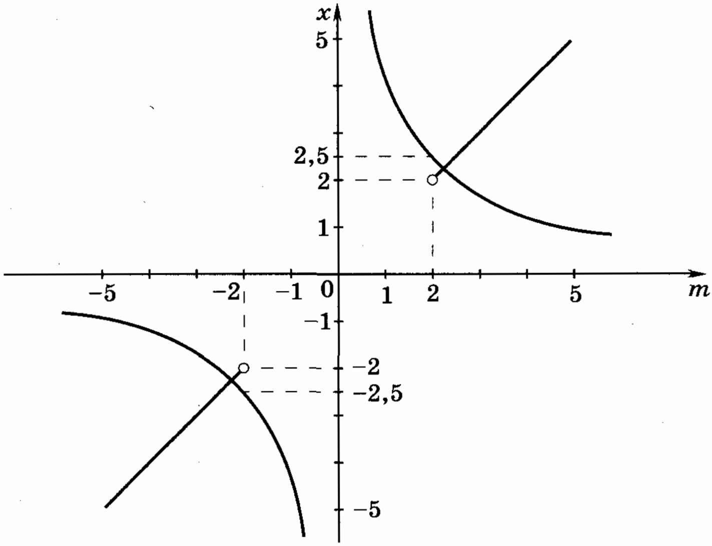


Рис. 436

№ 17. Решите уравнение $\sqrt{x-3}\cdot\log_5(2k-x)=0$.

Решение.

$$\text{ООУ: }\begin{cases} k\in\mathrm{R}, \\ x\geqslant 3, \\ x<2k. \end{cases}$$

1) $x-3=0$, $x_1=3$.

Исследование.

а) $\begin{cases} x_1=3, \\ 3<2k; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=3, \\ k>3/2. \end{cases}$

б) Если $k \leqslant 3/2$, то $x_1=3$ не является корнем данного уравнения.

2) $\log_5(2k-x)=0$: $2k-x=1$, $x_2=2k-1$.

Исследование.

а) $\begin{cases} x_2=2k-1, \\ 2k-1 \geqslant 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2k-1, \\ k \geqslant 2. \end{cases}$

б) Если $k<2$, то $x_2=2k-1$ не является корнем данного уравнения.

Заполним ось ответа (рис. 437).

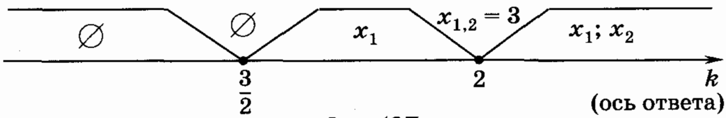


Рис. 437

Ответ: 1) Если $k>2$, то два различных корня $x_1=3$, $x_2=2k-1$.
2) Если $3/2<k\leqslant 2$, то $x_1=3$.
3) Если $k\leqslant 3/2$, то решений нет.

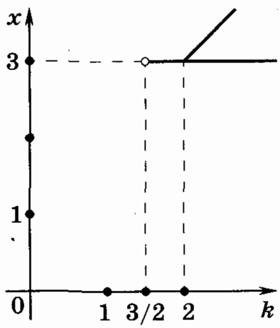


Рис. 438

Проиллюстрируем ответ в системе координат (kOx) (рис. 438).

№ 18. Решите уравнение $\arcsin x \cdot \lg(mx-m+1)=0$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ mx-m+1>0, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

1) $\arcsin x = 0$: $x_1 = 0$.

<u>Исследование</u>.

а) $\begin{cases} x_1 = 0, \\ -m + 1 > 0, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ m < 1. \end{cases}$

б) Если $m \geqslant 1$, то $x_1 = 0$ не является корнем данного уравнения.

2) $\lg(mx - m + 1) = 0$: $mx - m + 1 = 1$, $mx = m$.

$m = 0$: $x \in \mathrm{R}$.

$m \neq 0$: $x_2 = 1$.

<u>Исследование</u>.

а) $\begin{cases} m = 0, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

б) $x_2 = 1$ — корень данного уравнения при любых значениях m.

Ответ списывается с оси ответа (рис. 439).

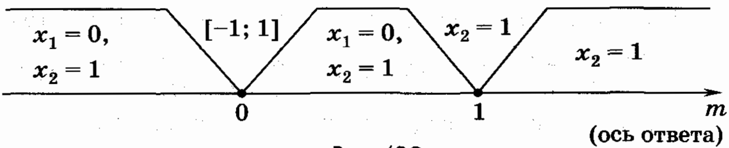


Рис. 439

<u>Ответ</u>: 1) Если $m \in (-\infty; 0) \cup \cup (0; 1)$, то два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.
2) Если $m = 0$, то $x \in [-1; 1]$.
3) Если $m \geqslant 1$, то $x_2 = 1$.

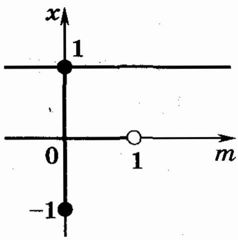


Рис. 440

Проиллюстрируем ответ в системе координат (mOx) (рис. 440).

№ 19. Решите уравнение $3^{\log_3(x^2 - m^2)} = 3 - 4m$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} m \in \mathrm{R}, \\ x^2 > m^2. \end{cases}$

Учитывая, что левая часть уравнения в своей области определения принимает только положительные значения, заключаем: если уравнение имеет корни, то только при условии, что $3 - 4m > 0$, т. е. $m < 3/4$. Тогда остается решить уравнение $x^2 - m^2 = 3 - 4m$, где $m < 3/4$:

$$x^2 = m^2 - 4m + 3, \qquad x = \pm\sqrt{m^2 - 4m + 3}.$$

Ответ: 1) Если $m < 3/4$, то $x = \pm\sqrt{m^2 - 4m + 3}$.
2) Если $m \geqslant 3/4$, то решений нет.

№ 20. Решите уравнение $\log_3(ax - 3) = \log_3(2x - a)$.

Решение.

$$\text{ООУ:} \begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x > a/2, \\ ax > 3. \end{cases}$$

Данное уравнение равносильно каждой из систем:

$$\begin{cases} ax - 3 = 2x - a, \\ ax - 3 > 0 \end{cases} \quad (1) \text{ или } \begin{cases} ax - 3 = 2x - a, \\ 2x - a > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решим одну из них, например систему (2).
Сначала решаем уравнение системы, представив его в виде $x(a - 2) = 3 - a$.

1) Если $a = 2$, то решений нет.

2) Если $a \neq 2$, то $x = (3 - a)/(a - 2)$.

И далее: $(3 - a)/(a - 2) > a/2$,

$$\frac{6 - 2a - a^2 + 2a}{a - 2} > 0,$$

$(6 - a^2)/(a - 2) > 0$ (рис. 441).

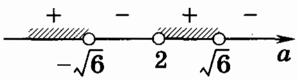


Рис. 441

Ответ: 1) Если $a \in (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (2; \sqrt{6})$,

то $x = \dfrac{3 - a}{a - 2}$.

2) Если $a \in [-\sqrt{6}; 2] \cup [\sqrt{6}; +\infty)$,
то решений нет.

4.2. Простейшие логарифмические уравнения с параметром и к ним сводимые

№ 1. Решите уравнение $\log_5 (a+1)x = 2$.

Решение.

Воспользуемся определением логарифма:

$(a+1)x = 25$.

1) $a = -1$: решений нет.

2) $a \neq -1$: $x = \dfrac{25}{a+1}$. (*)

Заметим еще раз, что в этом случае не надо устанавливать ООУ, так как если $(a+1)x = 25$, то $(a+1)x > 0$.

Заполняем ось ответа (рис. 442).

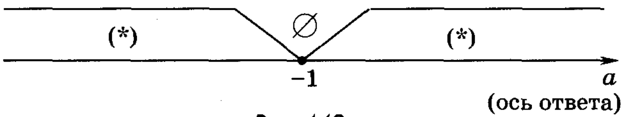


Рис. 442

Ответ: 1) Если $a \neq -1$, то $x = 25/(a+1)$.
2) Если $a = -1$, то решений нет.

№ 2. Решите уравнение $\log_2 (ax(x+4)) = 2$.

Решение.

Переходим к уравнению $ax(x+4) = 4$:

$ax^2 + 4ax - 4 = 0$.

Рассмотрим ряд случаев.

1) $a = 0$: решений нет.

2) $a \neq 0$. Находим $D_1 = 4a(a+1)$.

а) $a \in (-1; 0)$. Решений нет.

б) $a = -1$: $x_{1,2} = -2$. (*)

в) $a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$:

$x_{1,2} = \dfrac{-2a \pm 2\sqrt{a(a+1)}}{a}$. (**)

Заполняем ось ответа (рис. 443).

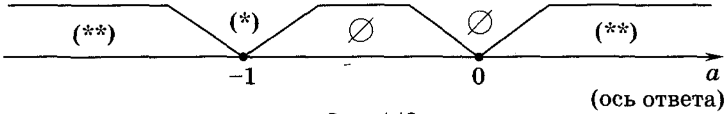


Рис. 443

Ответ: 1) Если $a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$, то два различных корня $x_{1,2} = \dfrac{-2a \pm 2\sqrt{a(a+1)}}{a}$.
2) Если $a = -1$, то $x_{1,2} = -2$.
3) Если $a \in (-1; 0]$, то решений нет.

№ 3. Решите уравнение $\lg \dfrac{b|x|}{b-4} = 1$.

Решение.
При $b = 4$ решений нет, так как $b = 4$ является недопустимым.
Если $b \neq 4$, то решаем уравнение $b|x| = 10(b-4)$.
1) $b = 0$: решений нет.
2) $0 < b < 4$: решений нет, так как $(b-4)/b < 0$.
3) $b \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$: $|x| = 10(b-4)/b$,
$x = \pm 10(b-4)/b$ (рис. 444). (*)

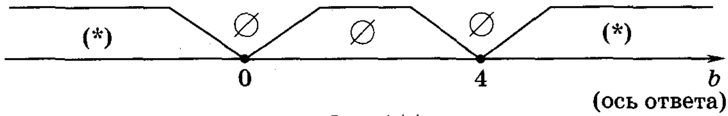


Рис. 444

Ответ: 1) Если $b \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$, то $x = \pm 10(b-4)/b$.
2) Если $b \in [0; 4]$, то решений нет.

№ 4. Решите уравнение $\log_2 \dfrac{a}{x-1} = 3$.

Решение.
Достаточно решить уравнение $a/(x-1) = 8$, равносильное данному. Для второго уравнения установим ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Решаем уравнение-следствие $a - 8x + 8 = 0$:
$x = (a + 8)/8$.

Исследование.

1) $\begin{cases} x = (a+8)/8, \\ (a+8)/8 \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x = (a+8)/8, \\ a \neq 0. \end{cases}$

2) Если $a = 0$, то решений нет (рис. 445).

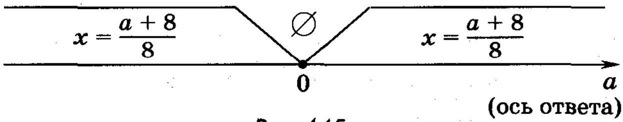


Рис. 445

Ответ: 1) Если $a \neq 0$, то $x = (a + 8)/8$.
2) Если $a = 0$, то решений нет.

№ 5. Решите уравнение $\lg \dfrac{c+2}{(x+1)(x-4)} = 0$.

Решение.

Переходим к уравнению $\dfrac{c+2}{(x+1)(x-4)} = 1$. (1)

Устанавливаем для этого уравнения ООУ: $\begin{cases} c \in \mathrm{R}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Освободившись от знаменателя, получаем уравнение-следствие $x^2 - 3x - c - 6 = 0$, (2)
у которого $\mathrm{D} = 33 + 4c$.

1) $\mathrm{D} < 0$, т. е. $c < -33/4$. Решений нет.

2) $\mathrm{D} = 0$, т. е. $c = -33/4$: $x_{1,2} = 3/2$.

3) $\mathrm{D} > 0$, т. е. $c > -33/4$:

$x_{1,2} = (3 \pm \sqrt{33 + 4c})/2$. (*)

Исследование.

Подставим вместо x число -1 в уравнение (2): $1 + 3 - c - 6 = 0$, $c = -2$.

Теперь в это же уравнение (2) подставим вместо c число -2: $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. В этом случае решений нет.

Если вместо x в уравнение (2) подставить 4, то $c = -2$. В этом случае также решений нет (рис. 446).

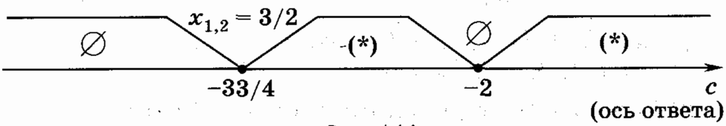


Рис. 446

<u>Ответ</u>: 1) Если $c \in (-33/4; -2) \cup (-2; +\infty)$, то $x_{1,2} = (3 \pm \sqrt{33 + 4c})/2$.

2) Если $c = -33/4$, то $x_{1,2} = 3/2$.

3) Если $c \in (-\infty; -33/4) \cup \{-2\}$, то решений нет.

№ 6. Решите уравнение $\log_{|a+2|}(x+1)^2 = 2$.

<u>Решение</u>.

ООУ: $\begin{cases} a \neq -2, \\ a \neq -3, \\ a \neq -1, \\ x \neq -1. \end{cases}$

Переходим к уравнению $(x+1)^2 = |a+2|^2$.

И далее: $\left[\begin{array}{l} x + 1 = a + 2, \\ x + 1 = -a - 2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = a + 1, \\ x_2 = -a - 3. \end{array}\right.$

Легко видеть, что x_1 и x_2 становятся недопустимыми (равными −1), если $|a + 2| = 0$, т. е. $a = -2$.

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \neq -3$, $a \neq -2$, $a \neq -1$, то $x_1 = a + 1$, $x_2 = -a - 3$.

2) Если $a = -3$, или $a = -2$, или $a = -1$, то решений нет.

№ 7. Решите уравнение $\log_3(\log_2(a \sin x - 1)) = 0$.

<u>Решение</u>.

В данном случае ООУ можно не находить, переходя к равносильным уравнениям: $\log_2(a \sin x - 1) = 1$, $a \sin x - 1 = 2$. Остается решить уравнение $a \sin x = 3$.

1) $a = 0$: решений нет.

2) $a \neq 0$: $\sin x = 3/a$.

а) $a = 3$: $\sin x = 1$, $x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. (*)

б) $a = -3$: $\sin x = -1$, $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. (**)

в) $|3/a| > 1$, т. е. $a \in (-3; 0) \cup (0; 3)$: решений нет.

г) $|3/a| < 1$, т. е. $a \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$:

$x = (-1)^m \arcsin(3/a) + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. (***)

Заполним ось ответа (рис. 447).

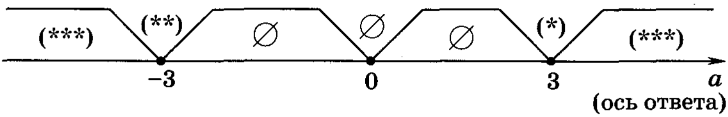


Рис. 447

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$, то $x = (-1)^m \arcsin(3/a) + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.
2) Если $a = -3$, то $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
3) Если $a = 3$, то $x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
4) Если $a \in (-3; 3)$, то решений нет.

№ 8. Решите уравнение $\log_{1/2} \sqrt{\left(\dfrac{kx-2}{3-x}\right)^2} = 0$.

<u>Решение</u>.

Переходим к уравнению, равносильному данному: $\left|\dfrac{kx-2}{3-x}\right| = 1$. Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases} |xk-2| = |3-x|, \\ x \neq 3. \end{cases}$

И далее:

$$\begin{cases} kx - 2 = 3 - x, \\ x \neq 3 \end{cases} \quad (1) \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} kx - 2 = x - 3, \\ x \neq 3. \end{cases} \quad (2)$$

Решим систему (1): $\begin{cases} (k+1)x = 5, \\ x \neq 3. \end{cases}$

1) Если $k = -1$, то система (1) решений не имеет.

2) $k \neq -1$: $\begin{cases} x_1 = 5/(k+1), \\ 5/(k+1) \neq 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 5/(k+1), \\ k \neq 2/3. \end{cases}$

3) Если $k = 2/3$, то система (1) решений не имеет.

Представим результаты на оси (1) рис. 448.

Рассмотрим теперь систему (2): $\begin{cases}(k-1)x=-1,\\ x\neq 3.\end{cases}$

1) Если $k=1$, то система (2) решений не имеет.

2) $k\neq 1$: $\begin{cases}x_2=1/(1-k),\\ 1/(1-k)\neq 3,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1/(1-k),\\ k\neq 2/3.\end{cases}$

3) При $k=2/3$ система (2) решений не имеет.

Заполняем ось (2) (рис. 448), а затем — ось ответа.

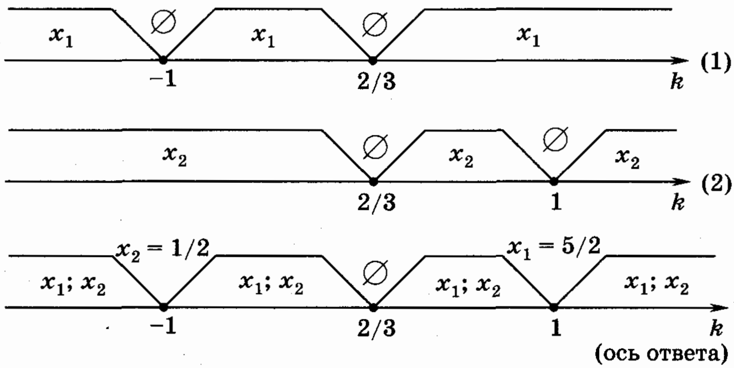


Рис. 448

<u>Ответ</u>: 1) Если $k\in(-\infty;-1)\cup(-1;2/3)\cup(2/3;1)\cup$ $\cup(1;+\infty)$, то $x_1=5/(k+1)$; $x_2=1/(1-k)$.

2) Если $k=-1$, то $x_2=1/2$.

3) Если $k=1$, то $x_1=5/2$.

4) Если $k=2/3$, то решений нет.

№ 9. Решите уравнение $\log_2^2(mx^2-2x+2)=1$.

<u>Решение</u>.

Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{ll}\log_2(mx^2-2x+2)=1, & (1)\\ \log_2(mx^2-2x+2)=-1. & (2)\end{array}\right.$

Решим каждое из уравнений и объединим полученные множества решений.

(1): $\log_2(mx^2 - 2x + 2) = 1$: $mx^2 - 2x + 2 = 2$,

$x(mx - 2) = 0$.

1) $x_1 = 0$ при любом $m \in \mathrm{R}$.

2) $mx - 2 = 0$:

а) Если $m = 0$, то уравнение $mx - 2 = 0$ решений не имеет.

б) Если $m \neq 0$, то $x_2 = 2/m$.

Заполнием ось (1) (рис. 449).

(2): $\log_2(mx^2 - 2x + 2) = -1$: $mx^2 - 2x + 2 = 1/2$,

$mx^2 - 2x + 3/2 = 0$.

1) Если $m = 0$, то $x = 3/4$.

2) Пусть $m \neq 0$. Решаем уравнение второй степени.

а) $D_1 < 0$: $1 - 3m/2 < 0$, т. е. $m > 2/3$. Решений нет.

б) $m = 2/3$: $x_{3,\,4} = 3/2$.

в) $m < 2/3$: $x_{3,\,4} = \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3m}{2}}\right)/m$. (Ось (2) на рис. 449.)

Объединяем решения (ось ответа на рис. 449).

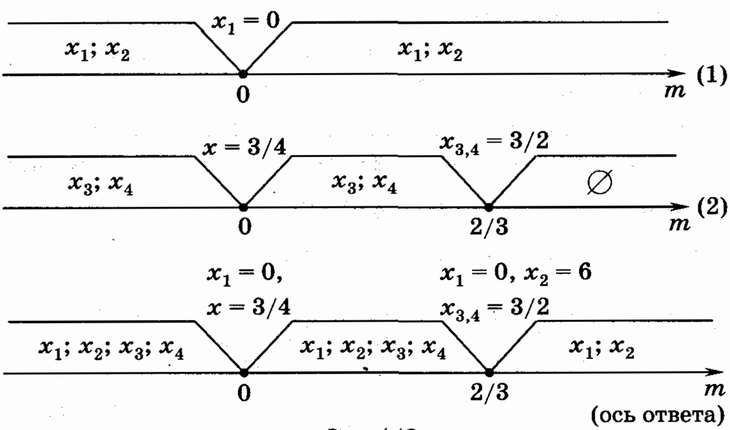


Рис. 449

Ответ: 1) Если $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 2/3]$,

то $x = 0$, $x = 2/m$, $x = \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3m}{2}}\right)/m$.

2) Если $m > 2/3$, то $x = 0$, $x = 2/m$.

3) Если $m = 0$, то $x = 0$, $x = 3/4$.

№ 10. Решите уравнение $\log_{ax}(x - 1) = 2$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} ax > 0, \\ ax \neq 1, \\ x > 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ a > 0, \\ ax \neq 1. \end{cases}$

Переходим к уравнению $x - 1 = a^2x^2$:

$a^2x^2 - x + 1 = 0$, $D = 1 - 4a^2$.

Рассмотрим ряд случаев.

1) $D < 0$, т. е. $a > 1/2$. Решений нет.

2) $D = 0$, т. е. $a = 1/2$: $x_{1,2} = 2$.

3) $D > 0$, т. е. $0 < a < 1/2$: $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 - 4a^2})/2a^2$.

Исследование.

1) Если $a = 1/2$, то $x = 2$, а потому $ax = 1$. Значит, при $a = 1/2$ данное уравнение решений не имеет.

2) Пусть $a \in (0; 1/2)$. Из уравнения $x - 1 = a^2x^2$ следует, что $x > 1$ для любого корня этого уравнения. Если же $ax = 1$ (для x_1 или x_2), то $x = 2$. А в этом случае $a = 1/2$. Но при $a = 1/2$ решений нет. Итак, если $a \in (0; 1/2)$, то уравнение имеет два корня $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 - 4a^2})/2a^2$.

Заполняем ось ответа (рис. 450).

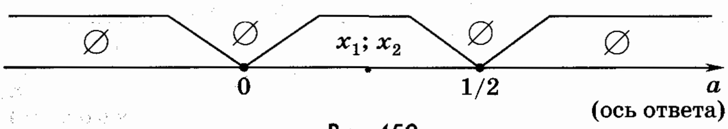


Рис. 450

Ответ: 1) Если $a \in (0; 1/2)$,

то $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 - 4a^2})/2a^2$.

2) В остальных случаях решений нет.

№ 11. Решите уравнение $\log_{(x-a)}(x - 1) = 2$.

Решение.

$$\text{ООУ: } \begin{cases} a \in R, \\ x > 1, \\ x > a, \\ x \neq a + 1. \end{cases}$$

Воспользовавшись определением логарифма, получаем уравнение $x - 1 = (x - a)^2$. Заметим сразу, что найденные корни этого уравнения удовлетворяют условию $x > 1$, если $x > a$.

Решим уравнение второй степени

$x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 1 = 0$.

1) $D < 0$, т. е. $(2a + 1)^2 - 4a^2 - 4 < 0$, $4a - 3 < 0$, $a < 3/4$.

В этом случае решений нет.

2) $D = 0$, т. е. $a = 3/4$: $x_{1,2} = 5/4$.

3) $D > 0$, т. е. $a > 3/4$: $x_{1,2} = (2a + 1 \pm \sqrt{4a - 3})/2$.

Исследование.

$$1) \begin{cases} x_{1,2} = 5/4, \\ a = 3/4, \\ 5/4 \neq 3/4 + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{1,2} = 5/4, \\ a = 3/4. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 = (2a + 1 + \sqrt{4a - 3})/2, \\ a > 3/4, \\ (2a + 1 + \sqrt{4a - 3})/2 > a, \\ (2a + 1 + \sqrt{4a - 3})/2 \neq a + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = (2a + 1 + \sqrt{4a - 3})/2, \\ a > 3/4, \\ \sqrt{4a - 3} \neq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = (2a + 1 + \sqrt{4a - 3})/2, \\ a > 3/4, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x_2 = (2a + 1 - \sqrt{4a - 3}\,)/2, \\ a > 3/4, \\ (2a + 1 - \sqrt{4a - 3}\,)/2 > a, \\ (2a + 1 - \sqrt{4a - 3}\,)/2 \neq a + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = (2a + 1 - \sqrt{4a - 3}\,)/2, \\ a > 3/4, \\ \sqrt{4a - 3} < 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = (2a + 1 - \sqrt{4a - 3}\,)/2, \\ a > 3/4, \\ a < 1. \end{cases}$$

4) Если $a = 1$, то решений нет.

Заполним ось ответа (рис. 451).

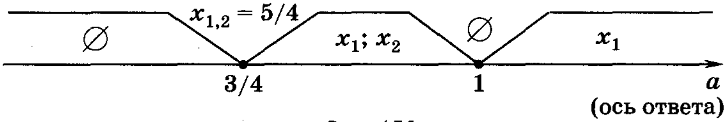


Рис. 451

Ответ: 1) Если $a \in (3/4;\ 1)$, то $x_{1,\,2} = (2a + 1 \pm \sqrt{4a - 3}\,)/2$.

2) Если $a = 3/4$, то $x_{1,\,2} = 5/4$.

3) Если $a > 1$, то $x_1 = (2a + 1 + \sqrt{4a - 3}\,)/2$.

4) Если $a \in (-\infty;\ 3/4) \cup \{1\}$, то решений нет.

Уравнения для самостоятельного решения

Решите уравнения.

1) $\log_3 (bx - 2x + 3) = 2$.

2) $\log_2 \dfrac{a|x - 1|}{a - 1} = 2$.

3) $\log_{1/2} (x(bx + 4)) = -2$.

4) $\log_3 \dfrac{cx - 4}{x + 1} = 1$.

12 – 5664

5) $\log_5 \dfrac{mx-1}{(x-2)(x+3)} = 0.$ 7) $\log_2(\log_3(b\cos x - 2)) = 0.$

6) $\log_{a^2-4}(x-1)^2 = 2.$ 8) $\lg\sqrt{\left(\dfrac{x+2}{3-mx}\right)^2} = 0.$

9) $\log_3^2((m-1)x^2 + 2x + 1) = 4.$

10) $\log_x(x-b) = 2.$

* * *

№ 12. Решите уравнение $\log_3(ax-2) = \log_3(x+2a)$.

Решение.

Данное уравнение равносильно системе

$\begin{cases} ax-2 = x+2a, \\ x > -2a; \end{cases}$ $\begin{cases} (a-1)x = 2a+2, \\ x > -2a. \end{cases}$

1) Если $a = 1$, то решений нет.

2) Пусть $a \neq 1$: $\begin{cases} x = (2a+2)/(a-1), \\ (2a+2)/(a-1) > -2a, \end{cases}$

$\begin{cases} x = (2a+2)/(a-1), \\ (2a^2+2)/(a-1) > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = (2a+2)/(a-1), \\ a > 1 \text{ (рис. 452)}. \end{cases}$

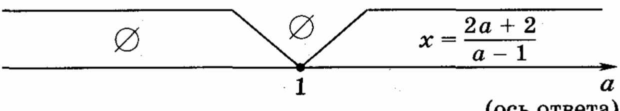


Рис. 452

Ответ: 1) Если $a > 1$, то $x = (2a+2)/(a-1)$.
2) Если $a \leqslant 1$, то решений нет.

№ 13. Решите уравнение $\log_3(x-5)^2 = \log_3(kx+24)$.

Решение.

Составим и решим систему, равносильную данному уравнению:

$\begin{cases} (x-5)^2 = kx+24, \\ x \neq 5, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - (10+k)x + 1 = 0, \\ x \neq 5. \end{cases}$

Рассмотрим сначала уравнение второй степени. Его дискриминант $D = (10 + k)^2 - 4 = (k + 12)(k + 8)$.

1) Если $D < 0$, т. е. $k \in (-12; -8)$, то решений нет.

2) $D = 0$: $k = -12$: $x_{1,2} = -1$.

$k = -8$: $x_{1,2} = 1$.

3) $D > 0$, т. е. $k \in (-\infty; -12) \cup (-8; +\infty)$, тогда

$$x_{1,2} = (10 + k \pm \sqrt{(k + 12)(k + 8)})/2. \qquad (*)$$

<u>Исследование.</u>

Подставляем $x = 5$ в уравнение $x^2 - (10 + k)x + 1 = 0$: $25 - 50 - 5k + 1 = 0$, $k = -24/5$. А теперь $k = -24/5$ подставим в то же уравнение: $x^2 - 26x/5 + 1 = 0$; $5x^2 - 26x + 5 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = 1/5. \end{array}\right.$ Значит, при $k = -24/5$ есть корень $x = 1/5$.

Заполним ось ответа (рис. 453).

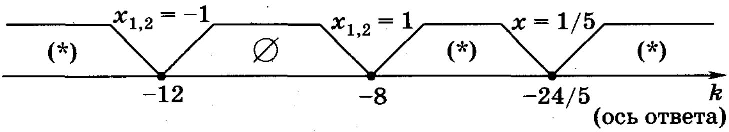


Рис. 453

<u>Ответ</u>: 1) Если $k \in (-\infty; -12) \cup (-8; -24/5) \cup$ $\cup (-24/5; +\infty)$, то два различных действительных корня $x_{1,2} = (10 + k \pm \sqrt{(k + 12)(k + 8)})/2$.

2) Если $k = -12$, то $x_{1,2} = -1$.

3) Если $k = -8$, то $x_{1,2} = 1$.

4) Если $k = -24/5$, то $x = 1/5$.

5) Если $k \in (-12; -8)$, то решений нет.

№ 14. Решите уравнение

$$\log_2((b - 2)x^2 - x) = \log_2(x + 2).$$

<u>Решение.</u>

Опять удобнее перейти к равносильной системе

$$\begin{cases} (b - 2)x^2 - x = x + 2, \\ x > -2. \end{cases}$$

Решаем уравнение системы $(b-2)x^2-2x-2=0$.

1) $b=2$: $x=-1$.

2) $b\neq 2$: $D_1=1+2(b-2)=2b-3$.

а) $D_1<0$, т. е. $b<3/2$. Решений нет.

б) $b=3/2$: $x^2+4x+4=0$, $x_{1,2}=-2$. Решений нет.

в) $b>3/2$: $x_1=(1+\sqrt{2b-3})/(b-2)$,

$x_2=(1-\sqrt{2b-3})/(b-2)$.

Узнаем теперь, при каких значениях $b>3/2$, $b\neq 2$, найденные x_1, x_2 удовлетворяют неравенству $x>-2$.

Исследование.

$$1)\ \begin{cases} x_1=(1+\sqrt{2b-3})/(b-2), \\ b>3/2,\ b\neq 2, \\ x_1>-2; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (1+\sqrt{2b-3})/(b-2)>-2, \\ 3/2<b<2, \end{cases} \\ \begin{cases} (1+\sqrt{2b-3})/(b-2)>-2, \\ b>2; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{2b-3}<3-2b, \\ 3/2<b<2, \end{cases} \\ b>2. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Система (1) несовместна, а решением совокупности является интервал $(2;+\infty)$. Это значит, что x_1 является корнем данного уравнения при $b>2$.

$$2)\ \begin{cases} x_2=(1-\sqrt{2b-3})/(b-2), \\ b>3/2,\ b\neq 2, \\ x_2>-2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2b-3})/(b-2)>-2, \\ b>3/2,\ b\neq 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2b-3-\sqrt{2b-3})/(b-2)>0, \\ b>3/2,\ b\neq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{2b-3}-1)/(b-2)>0, \\ b>3/2;\ b\neq 2. \end{cases}$$

Легко видеть, что если $3/2 < b < 2$, то числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства, являются отрицательными числами. Если же $b > 2$, то — положительными. Значит, x_2 является корнем данного уравнения, если $b \in (3/2; 2) \cup (2; +\infty)$.

Заполняем ось ответа (рис. 454).

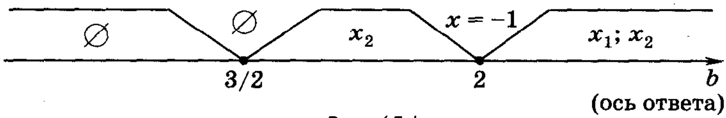


Рис. 454

Ответ: 1) Если $b \in (2; +\infty)$,
то $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{2b-3})/(b-2)$.
2) Если $b \in (3/2; 2)$,
то $x_2 = (1 - \sqrt{2b-3})/(b-2)$.
3) Если $b = 2$, то $x = -1$.
4) Если $b \leqslant 3/2$, то решений нет.

№ 15. Решите уравнение

$$\log_2 \frac{(a-1)x}{a} = \log_2((a+1)x^2).$$

Решение.

$$\text{ООУ:} \begin{cases} a > -1, \\ a \neq 0, \\ (a-1)x/a > 0. \end{cases}$$

Перейдем от данного уравнения к уравнению-следствию: $(a-1)x/a = (a+1)x^2$. Решаем его:

$$x((a+1)x - (a-1)/a) = 0,$$

$$\left[\begin{aligned} &x = 0, \\ &(a+1)x = (a-1)/a. \end{aligned}\right.$$

Легко видеть, что $x = 0$ не удовлетворяет ООУ. Остается решить второе уравнение совокупности:

$$x = \frac{a-1}{a(a+1)}. \qquad (*)$$

Исследование.

1) $\begin{cases} x = \dfrac{a-1}{a(a+1)}, \\ \dfrac{(a-1)^2}{a^2(a+1)} > 0, \\ a > -1, \\ a \neq 0. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{a-1}{a(a+1)}, \\ a > -1, \\ a \neq 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$

2) Если $a = 1$, то решений нет.

Заполним ось ответа (рис. 455).

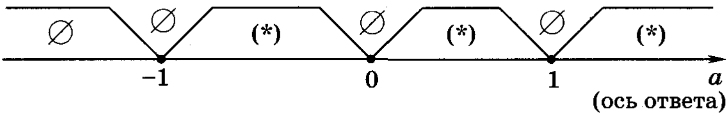


Рис. 455

Ответ: 1) Если $a \in (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x = \dfrac{a-1}{a(a+1)}$.

2) В остальных случаях решений нет.

№ 16. Решите уравнение $9^{\lg(x-a) - \lg 2} = 3^{\lg(x-1)}$.

Решение.

Переходим к равносильному уравнению

$2 \lg \dfrac{x-a}{2} = \lg(x-1)$, а затем к системе

$\begin{cases} (x-a)^2/4 = x-1, \\ x > a. \end{cases}$

Решаем сначала уравнение системы.

$x^2 - 2ax + a^2 = 4x - 4$, $x^2 - 2(a+2)x + a^2 + 4 = 0$; $D_1 = 4a$.

1) $D_1 < 0$, т. е. $a < 0$. Решений нет.

2) $D_1 = 0$, т. е. $a = 0$: $x_{1,2} = 2$.

3) $D_1 > 0$, т. е. $a > 0$: $x_1 = a + 2 + 2\sqrt{a}$;

$x_2 = a + 2 - 2\sqrt{a}$.

Исследование.

1) $\begin{cases} x_1 = a + 2 + 2\sqrt{a}, \\ a > 0, \\ x_1 > a, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = a + 2 + 2\sqrt{a}, \\ a > 0, \\ 2 + 2\sqrt{a} > 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = a + 2 + 2\sqrt{a}, \\ a > 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_2 = a + 2 - 2\sqrt{a}, \\ a > 0, \\ x_2 > a, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = a + 2 - 2\sqrt{a}, \\ a > 0, \\ 2 - 2\sqrt{a} > 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = a + 2 - 2\sqrt{a}, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$

Если $a \geqslant 1$, то x_2 не является корнем данного уравнения (рис. 456).

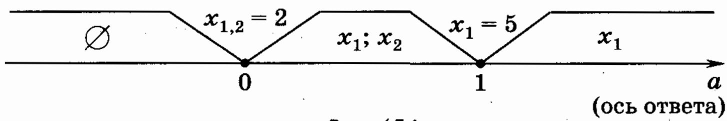


Рис. 456

Ответ: 1) Если $a \in (0; 1)$, то $x_{1,2} = a + 2 \pm 2\sqrt{a}$.

2) Если $a \geqslant 1$, то $x_1 = a + 2 + 2\sqrt{a}$.

3) Если $a = 0$, то $x_{1,2} = 2$.

4) Если $a < 0$, то решений нет.

№ 17. Решите уравнение

$-\log_5 (2 - |x - b|) = \log_{0,2} (5 - x)$.

Решение.

Переходим к уравнению

$\log_{0,2} (2 - |x - b|) = \log_{0,2} (5 - x)$

и далее к равносильной системе $\begin{cases} 2 - |x - b| = 5 - x, \\ x < 5. \end{cases}$

Раскрыв модуль, получим две системы.

Решаем сначала систему (1):

$$\begin{cases} 2 - x + b = 5 - x, \\ x \geqslant b, \\ x < 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \cdot x = 3 - b, \\ x \geqslant b, \\ x < 5. \end{cases}$$

1) Если $b \neq 3$, то система (1) решений не имеет.

2) Если $b = 3$, то $3 \leqslant x < 5$ (ось (1) на рис. 457).

Теперь решим систему (2):

$$\begin{cases} 2 + x - b = 5 - x, \\ x < b, \\ x < 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (3 + b)/2, \\ (3 + b)/2 < b, \\ (3 + b)/2 < 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (3 + b)/2, \\ b > 3, \\ b < 7. \end{cases}$$

Если $b \in (-\infty; 3] \cup [7; +\infty)$, то система (2) решений не имеет (ось (2) на рис. 457). Объединив множества решений систем (1) и (2), запишем ответ (рис. 457, ось ответа).

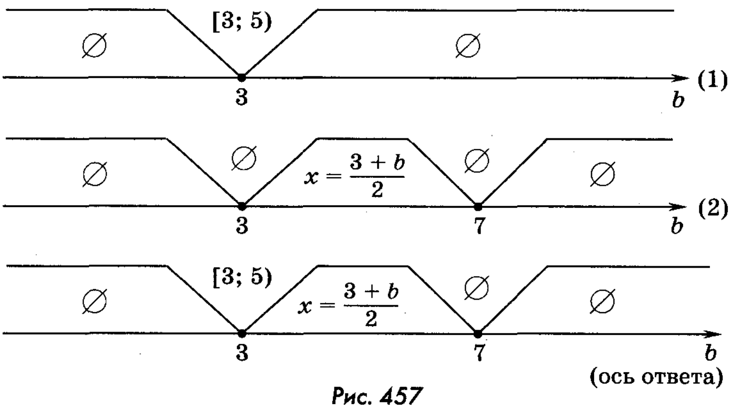


Рис. 457

<u>Ответ</u>: 1) Если $b \in (3; 7)$, то $x = (3 + b)/2$.
2) Если $b = 3$, то $x \in [3; 5)$.
3) Если $b \in (-\infty; 3) \cup [7; +\infty)$, то решений нет.

№ 18. Решите уравнение

$\log_2(b\cos x + 2) = \log_2(3b - 2)$.

Решение.

Данное уравнение равносильно системе

$\begin{cases} b\cos x + 2 = 3b - 2, \\ b > 2/3, \end{cases}$ $\begin{cases} b\cos x = 3b - 4, \\ b > 2/3. \end{cases}$

Рассмотрим ряд случаев.

1) $b = 4/3$: $\cos x = 0$, $x_1 = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$.

2) $(3b - 4)/b = 1$, $b = 2$: $\cos x = 1$, $x_2 = 2\pi k$, $k \in Z$.

3) $(3b - 4)/b = -1$, $b = 1$: $\cos x = -1$,
$x_3 = \pi + 2\pi m$, $m \in Z$.

4) $b \in (2/3;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$: решений нет, так как в этом случае $\left|\dfrac{3b-4}{b}\right| > 1$.

5) $b \in (1;\ 4/3) \cup (4/3;\ 2)$:

$x_4 = \pm\arccos\dfrac{3b-4}{b} + 2\pi l$, $l \in Z$.

Заполняем ось ответа (рис. 458).

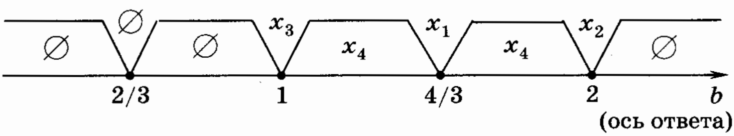


Рис. 458

Ответ: 1) Если $b \in (1;\ 4/3) \cup (4/3;\ 2)$,

то $x = \pm\arccos\dfrac{3b-4}{b} + 2\pi l$, $l \in Z$.

2) Если $b = 1$, то $x = \pi + 2\pi m$, $m \in Z$.

3) Если $b = 4/3$, то $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$.

4) Если $b = 2$, то $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

5) Если $b \in (-\infty;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$, то решений нет.

№ 19. Решите уравнение $\lg(\sqrt{ax+15}-2)=\lg(2-x)$.

<u>Решение</u>.

Рассматриваем систему, равносильную данному уравнению:

$$\begin{cases}\sqrt{ax+15}-2=2-x,\\ x<2,\end{cases} \qquad \begin{cases}\sqrt{ax+15}=4-x,\\ x<2.\end{cases}$$

Если $x<2$, то $4-x>0$, а потому уравнение $\sqrt{ax+15}=4-x$ равносильно уравнению

$ax+15=(4-x)^2$; тогда $\begin{cases}x^2-x(8+a)+1=0,\\ x<2.\end{cases}$

Решаем уравнение второй степени, дискриминант которого $D=a^2+16a+60=(a+6)(a+10)$.

а) $D<0$, $a\in(-10;-6)$. Решений нет.

б) $D=0$; $a=-10$, тогда $x_{1,2}=-1$.

$a=-6$, тогда $x_{1,2}=1$.

в) $D>0$, $a\in(-\infty;-10)\cup(-6;+\infty)$, тогда

$x_1=(8+a+\sqrt{a^2+16a+60})/2;$

$x_2=(8+a-\sqrt{a^2+16a+60})/2.$

<u>Исследование</u>.

$$1)\begin{cases}x_1=(8+a+\sqrt{a^2+16a+60})/2,\\ a\in(-\infty;-10)\cup(-6;+\infty),\\ x_1<2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(8+a+\sqrt{a^2+16a+60})/2<2,\\ a\in(-\infty;-10)\cup(-6;+\infty),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+16a+60}<-4-a,\\ a\in(-\infty;-10)\cup(-6;+\infty),\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+16a+60<a^2+8a+16,\\ a\in(-\infty;-10)\cup(-6;-4),\end{cases}$$

$$\begin{cases}a<-11/2,\\ a\in(-\infty;-10)\cup(-6;-4),\end{cases} a\in(-\infty;-10)\cup(-6;-5{,}5).$$

$$2)\begin{cases} x_2 = (8 + a - \sqrt{a^2 + 16a + 60})/2, \\ a \in (-\infty; -10) \cup (-6; +\infty), \\ x_2 < 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 + a - \sqrt{a^2 + 16a + 60} < 4, \\ a \in (-\infty; -10) \cup (-6; +\infty), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + 16a + 60} > a + 4, \\ a \in (-\infty; -10) \cup (-6; +\infty). \end{cases}$$

Если $a \in (-\infty; -10) \cup (-6; -4]$, то $a + 4 \leqslant 0$, а потому неравенство системы верно.

Пусть $a > -4$: $a^2 + 16a + 60 > a^2 + 8a + 16$, $8a > -44$, $a > -11/2$. Значит, при $a > -4$ неравенство системы также верно. Поэтому x_2 является корнем данного уравнения при $a \in (-\infty; -10) \cup (-6; +\infty)$.

Заполняем ось ответа (рис. 459).

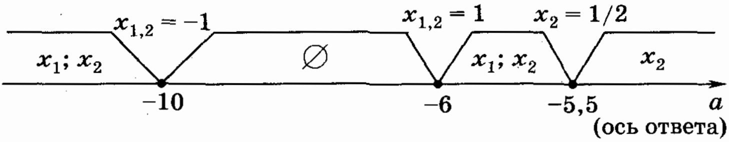


Рис. 459

Ответ: 1) Если $a \in (-\infty; -10) \cup (-6; -5{,}5)$, то два различных корня

$$x_{1,2} = (8 + a \pm \sqrt{a^2 + 16a + 60})/2.$$

2) Если $a \in [-5{,}5; +\infty)$,

то $x_2 = (8 + a - \sqrt{a^2 + 16a + 60})/2$.

3) Если $a = -10$, то $x_{1,2} = -1$.

4) Если $a = -6$, то $x_{1,2} = 1$.

5) Если $a \in (-10; -6)$, то решений нет.

№ 20. Решите уравнение

$$\log_{ax+1}(a^2 + x^2) = \log_{ax+1}(x^2 + ax + 4).$$

Решение.

Переходим опять к равносильной системе

$$\begin{cases} a^2 + x^2 = x^2 + ax + 4, \\ ax \neq 0, \\ ax > -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} ax = a^2 - 4, \\ ax \neq 0, \\ ax > -1. \end{cases}$$

1) Если $a = 0$, то система несовместна.

2) Пусть $a \neq 0$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a^2 - 4}{a}, \\ \dfrac{a^2 - 4}{a} \cdot a \neq 0, \\ \dfrac{a^2 - 4}{a} \cdot a > -1, \\ a \neq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a^2 - 4}{a}, \\ a \neq \pm 2, \\ a^2 > 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a^2 - 4}{a}, \\ a \neq \pm 2, \\ |a| > \sqrt{3}. \end{cases}$$

Заполняем ось ответа (рис. 460).

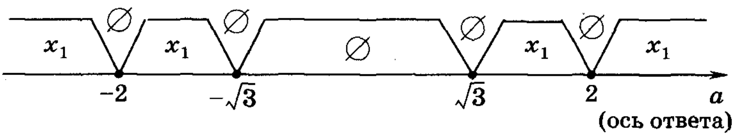


Рис. 460

Ответ: 1) Если $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -\sqrt{3}) \cup$
$\cup (\sqrt{3}; 2) \cup (2; +\infty)$, то $x = (a^2 - 4)/a$.
2) В остальных случаях решений нет.

№ 21. При каких значениях a сумма $\log_a(\sin x + 2)$ и $\log_a(\sin x + 3)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x? (ЕГЭ 2002 г.)

Решение.

По условию уравнение

$\log_a(\sin x + 2) + \log_a(\sin x + 3) = 1$

должно иметь хотя бы один корень. Заметим, что $\sin x + 2 > 0$ и $\sin x + 3 > 0$ для любых действительных значений x.

ООУ: $\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ x \in \mathrm{R}. \end{cases}$

$\log_a((\sin x + 2)(\sin x + 3)) = \log_a a,$

$(\sin x + 2)(\sin x + 3) = a$, $\sin^2 x + 5\sin x + 6 - a = 0$.

Пусть $\sin x = t$, где $t \in [-1; 1]$. Тогда получим уравнение $t^2 + 5t + 6 - a = 0$, дискриминант которого $D = 4a + 1$. Заметим, что $4a + 1 > 0$ при всех $a \in$ ООУ. Функция $t^2 + 5t + 6 - a$, где $a > 0$, $a \neq 1$, задает семейство парабол, пересекающих ось абсцисс в двух точках (ветви направлены вверх). Абсцисса вершин парабол $t_0 = -2{,}5$ (рис. 461).

Легко видеть, что только больший корень квадратного трехчлена $t^2 + 5t + 6 - a$, где $a > 0$, $a \neq 1$, может удовлетворять условию $-1 \leqslant t \leqslant 1$ (рис. 462).

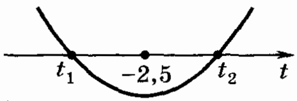


Рис. 461

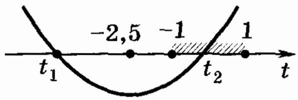


Рис. 462

Воспользуемся теоремой о расположении корней квадратного трехчлена:

$\begin{cases} f(-1) \leqslant 0, \\ f(1) \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2 - a \leqslant 0, \\ 12 - a \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} a \geqslant 2, \\ a \leqslant 12. \end{cases}$

Ответ: $[2; 12]$.

№ 22. При каких значениях параметра a уравнение $\log_{\sqrt{ax-6}}(2x^2 - 3x + 2) = 2\log_{ax-6}(x^2 + 2x - 4)$ имеет единственное решение?

Решение.

Рассматриваем систему, равносильную данному уравнению:

$$\begin{cases} 2x^2-3x+2=x^2+2x-4, \\ ax-6>0, \\ ax-6\neq 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ ax>6, \\ ax\neq 7. \end{cases}$$

Квадратное уравнение имеет два корня: $x_1=2$; $x_2=3$.

Исследование.

1) $\begin{cases} x_1=2, \\ 2a>6, \\ 2a\neq 7; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=2, \\ a>3, \\ a\neq 7/2 \end{cases}$

(ось (1) рис. 463).

2) $\begin{cases} x_2=3, \\ 3a>6, \\ 3a\neq 7, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=3, \\ a>2, \\ a\neq 7/3 \end{cases}$

(ось (2) рис. 463).

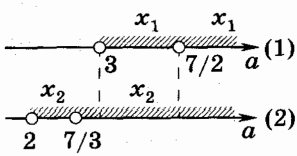


Рис. 463

Ответ: уравнение имеет единственное решение, если $a\in(2;\,7/3)\cup(7/3;\,3]\cup\{7/2\}$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решите уравнения (1—8).

1) $\log_{\frac{1}{2}}((a-1)x-3)=\log_{\frac{1}{2}}(x-2a)$.

2) $\log_{0,3}\dfrac{ax-2}{x-1}=\log_{0,3}(2a-1)$.

3) $\log_2(ax-4)=2\log_2 x$.

4) $\lg(x+3/2)=\lg(1/bx)$.

5) $\log_2(|x+b|-3)=-\log_{0,5}(x-1)$.

6) $\log_2(b\cos x-1)=\log_2(b+1)$.

7) $\ln(c\sin x+1)=\ln(3c-1)$.

8) $\log_5(2^x-9)=\log_5(a\cdot 2^x)$.

9) При каких значениях параметра a уравнение $\lg(\sqrt{3-ax}+1)=\lg(3-x)$ имеет положительные корни?

10) При каких значениях a уравнение

$$\log_{\sqrt{ax+6}}(2x^2+2x+4)=2\log_{ax+6}(x^2-3x-2)$$

имеет единственное решение?

11) При каких значениях a сумма $\log_a(2^x-1)$ и $\log_a(2^x-7)$ равна единице ровно при одном значении x? (ЕГЭ по математике 2002 г.)

4.3. Более сложные логарифмические уравнения и системы с параметром

№ 1. Решите уравнение

$$\log_2^2(ax+1)+\log_2(ax+1)-2=0.$$

Решение.

Пусть $\log_2(ax+1)=t$. Тогда получаем квадратное уравнение $t^2+t-2=0$, имеющее два различных корня $t_1=-2$, $t_2=1$. А теперь решаем совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\log_2(ax+1)=-2,\\ \log_2(ax+1)=1,\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}ax+1=1/4,\\ ax+1=2,\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}ax=-3/4,\\ ax=1.\end{array}\right.$$

Ответ: 1) Если $a=0$, то решений нет.
2) Если $a\neq 0$, то $x_1=-3/4a$; $x_2=1/a$.

№ 2. Решите уравнение

$$\log_{ax+1}^2 x+2\log_{ax+1}x+1=0.$$

Решение.

$$\text{ООУ: }\begin{cases}ax+1>0,\\ ax+1\neq 1,\\ x>0,\end{cases} \quad \begin{cases}a\neq 0,\\ ax>-1,\\ x>0.\end{cases}$$

Данное уравнение легко приводится к уравнению $(\log_{ax+1}x+1)^2=0$, откуда $\log_{ax+1}x=-1$, $x=1/(ax+1)$, $ax^2+x-1=0$. Получили уравнение второй степени относительно x, дискриминант которого $D=1+4a$.

а) $a<-1/4$: решений нет.

б) $a=-1/4$: $x_{1,2}=2$.

в) $a\in(-1/4;0)\cup(0;+\infty)$: $x_1=(-1+\sqrt{1+4a})/2a$; $x_2=(-1-\sqrt{1+4a})/2a$.

<u>Исследование</u>.

$$1)\ \begin{cases} x_1 = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2a, \\ (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2a > 0, \\ (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2 > -1, \\ a \in (-1/4;\, 0) \cup (0;\, +\infty). \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2a, \\ (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2a > 0, \\ \sqrt{1 + 4a} > -1, \\ a \in (-1/4;\, 0) \cup (0;\, +\infty); \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2a, \\ a \in (-1/4;\, 0), \\ \sqrt{1 + 4a} < 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2a, \\ a \in (0;\, +\infty), \\ \sqrt{1 + 4a} > 1, \end{cases} \end{array} \right. \quad \begin{cases} x_1 = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2a, \\ a \in (-1/4;\, 0) \cup (0;\, +\infty). \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x_2 = (-1 - \sqrt{1 + 4a})/2a, \\ (-1 - \sqrt{1 + 4a})/2a > 0, \\ (-1 - \sqrt{1 + 4a})/2 > -1, \\ a \in (-1/4;\, 0) \cup (0;\, +\infty), \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = (-1 - \sqrt{1 + 4a})/2a, \\ a \in (-1/4;\, 0), \\ \sqrt{1 + 4a} < 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = (-1 - \sqrt{1 + 4a})/2a, \\ a \in (-1/4;\, 0). \end{cases}$$

Заполняем ось ответа (рис. 464).

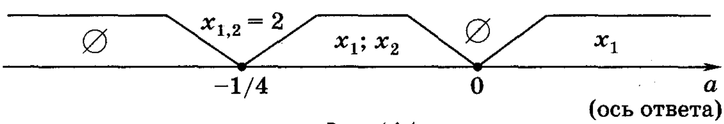


Рис. 464

<u>Ответ</u>: 1) Если $a \in (-1/4;\, 0)$, то $x_{1,\,2} = (-1 \pm \sqrt{1 + 4a})/2a$.

2) Если $a = -1/4$, то $x_{1,\,2} = 2$.

3) Если $a \in (0;\, +\infty)$, то $x_1 = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2a$.

4) Если $a \in (-\infty;\, -1/4) \cup \{0\}$, то решений нет.

№ 3. Решите уравнение $\log_{\sqrt{a}} \dfrac{\sqrt{2a-x}}{a} - \log_{1/a} x = 0.$

Решение.

$$\text{ООУ: } \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ 0 < x < 2a. \end{cases}$$

Применив известные свойства логарифмов, переходим к уравнению $\log_a \dfrac{2a-x}{a^2} + \log_a x = 0$. И далее: $\log_a \left(\dfrac{2a-x}{a^2} \cdot x\right) = 0$; $\dfrac{2a-x}{a^2} \cdot x = 1$; $x^2 - 2ax + a^2 = 0$; $(x-a)^2 = 0$, $x = a$.

Исследование.

Легко видеть, что любое число $x = a$ при $a > 0$, $a \neq 1$ удовлетворяет двойному неравенству $0 < x < 2a$. Заполняем ось ответа (рис. 465).

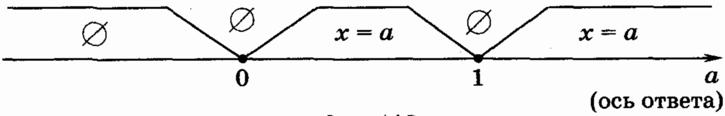


Рис. 465

Ответ: 1) Если $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x = a$.
2) В остальных случаях решений нет.

№ 4. Решите уравнение $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \dfrac{a^2-4}{2a-x} = 1.$

Решение.

$$\text{ООУ: } \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ \dfrac{a^2-4}{2a-x} > 0. \end{cases}$$

$\log_x a^2 \cdot \log_{a^2} \dfrac{a^2-4}{2a-x} = 1$; $\log_{a^2} \dfrac{a^2-4}{2a-x} = \log_{a^2} x$; $(a^2-4)/(2a-x) = x$; $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$; $x_1 = a + 2$; $x_2 = a - 2$.

Исследование.

Достаточно узнать, при каких значениях a, где $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 2$, будут верны неравенства $x > 0$, $x \neq 1$.

1) $\begin{cases} x_1 = a + 2, \\ a + 2 > 0, \\ a + 2 \neq 1, \\ a > 0, a \neq 1, \\ a \neq 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = a + 2, \\ a > 0, a \neq 1, \\ a \neq 2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_2 = a - 2, \\ a - 2 > 0, \\ a - 2 \neq 1, \\ a > 0, a \neq 1, \\ a \neq 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = a - 2, \\ a > 2, \\ a \neq 3. \end{cases}$

Заполним ось ответа (рис. 466).

Ответ: 1) Если $a \in (2; 3) \cup (3; +\infty)$, то $x_1 = a + 2$; $x_2 = a - 2$.
2) Если $a \in (0; 1) \cup (1; 2)$, то $x_1 = a + 2$.
3) Если $a = 3$, то $x_1 = 5$.
4) В остальных случаях решений нет.

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 467).

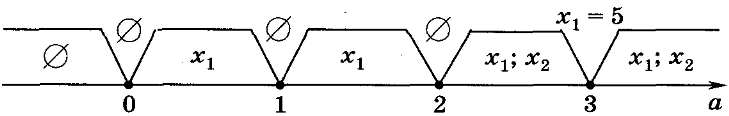


Рис. 466

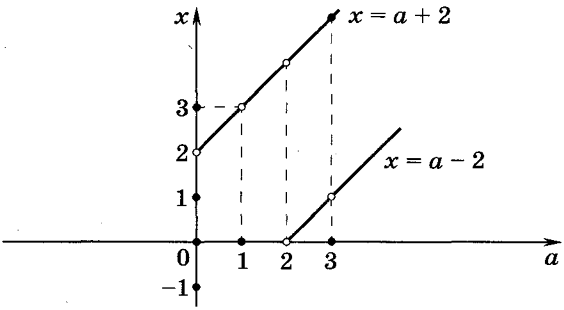


Рис. 467

№ 5. Решите уравнение $\sin x = \log_a (a-1)$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a > 1, \\ x \in R. \end{cases}$

1) $\log_a (a-1) = 0$, $a = 2$: $\sin a = 0$, $x_1 = \pi k, k \in Z$.

2) $\log_a (a-1) = -1$, $a - 1 = 1/a$, $a = (\sqrt{5} + 1)/2$: $\sin x = -1$, $x_2 = -\pi/2 + 2\pi n, n \in Z$.

3) $\begin{cases} \log_a (a-1) > -1, \\ \log_a (a-1) < 1, \\ a > 1; a \neq (1+\sqrt{5})/2; a \neq 2, \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 - a - 1 > 0, \\ a - 1 < a, \\ a > 1; a \neq (1+\sqrt{5})/2, a \neq 2, \end{cases}$ $\begin{cases} a > (1+\sqrt{5})/2, \\ a \neq 2. \end{cases}$

$x_3 = (-1)^m \arcsin \log_a (a-1) + \pi m, m \in Z$.

Ответ запишите сами по рис. 468.

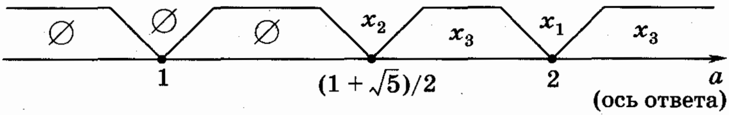


Рис. 468

№ 6. Решите уравнение $\log_2 x + \log_a x + \log_4 x = 1$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ x > 0. \end{cases}$

Приведем логарифмы к основанию 2:

$\log_2 x + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 a} + \dfrac{\log_2 x}{2} = 1$,

$\log_2 x(3 \log_2 a + 2) = 2 \log_2 a$.

1) Если $\log_2 a = -2/3$, т. е. $a = 1/\sqrt[3]{4}$, то решений нет.

2) $a \neq 1/\sqrt[3]{4}$: $\log_2 x = \dfrac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 2}$, $x = 2^{\frac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 3}}$. (*)

Отметим результаты на оси ответа (рис. 469).

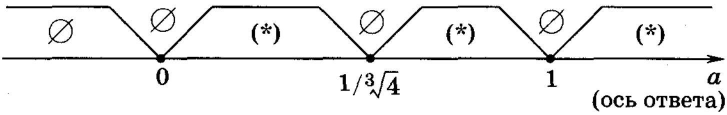


Рис. 469

Ответ: 1) Если $a \in (0; 1/\sqrt[3]{4}) \cup (1/\sqrt[3]{4}; 1) \cup$

$\cup (1; +\infty)$, то $x = 2^{\frac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 3}}$.

2) В остальных случаях решений нет.

№ 7. Решите уравнение $2\log_3 x + \log_{x/3} 3 = b$.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} b \in R, \\ x > 0, \\ x \neq 3. \end{cases}$

$2\log_3 x + 1/(\log_3 x - 1) = b$. Пусть $\log_3 x = t$, где $t \neq 1$: $2t + 1/(t-1) = b$. Переходим к уравнению-следствию $2t^2 - 2t + 1 = bt - b$, $2t^2 - (2+b)t + 1 + b = 0$. (1) Находим $D = b^2 - 4b - 4$.

1) $D < 0$, т. е. $b \in (2 - 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2})$. Решений нет.

2) $D = 0$: а) $b = 2 - 2\sqrt{2}$; $t = 1 - \sqrt{2}/2$,

$x_{1,2} = 3^{1 - \sqrt{2}/2}$. (*)

б) $b = 2 + 2\sqrt{2}$; $t = 1 + \sqrt{2}/2$; $x_{1,2} = 3^{1 + \sqrt{2}/2}$. (**)

3) $D > 0$, т. е. $b \in (-\infty; 2 - 2\sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{2}; +\infty)$:

$t_{1,2} = (2 + b \pm \sqrt{b^2 - 4b - 4})/4$;

$x_{1,2} = 3^{(2 + b \pm \sqrt{b^2 - 4b - 4})/4}$. (***)

Исследование.

Подставим $t = 1$ в уравнение (1): $2 - 2 - b + 1 + b = 0$, $0 \cdot b = -1$. Значит, t не достигает значения 1 ни при каких значениях $b \in R$.

Заполняем ось ответа (рис. 470).

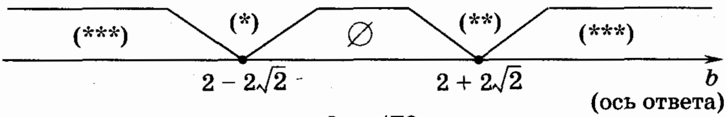


Рис. 470

Ответ: 1) Если $b \in (-\infty;\ 2-2\sqrt{2}) \cup (2+2\sqrt{2};\ +\infty)$, то $x_{1,\,2} = 3^{(2+b\,\pm\,\sqrt{b^2-4b-4})/4}$.

2) Если $b = 2-2\sqrt{2}$, то $x_{1,\,2} = 3^{1-\sqrt{2}/2}$.

3) Если $b = 2+2\sqrt{2}$, то $x_{1,\,2} = 3^{1+\sqrt{2}/2}$.

4) Если $b \in (2-2\sqrt{2};\ 2+2\sqrt{2})$, то решений нет.

№ 8. Решите уравнение

$$\log_c \sqrt{4+x} + 3\log_{c^2}(4-x) - \log_{c^4}(16-x^2)^2 = 2.$$

Решение.

ООУ: $\begin{cases} c > 0,\ c \ne 1, \\ x \in (-4;\ 4). \end{cases}$

Перейдем к основанию c^4:

$\log_{c^4}(4+x)^2 + 3\log_{c^4}(4-x)^2 = \log_{c^4}(16-x^2)^2 + \log_{c^4} c^8$; $(4+x)^2 \cdot (4-x)^6 = c^8(16-x^2)^2$; $(4-x)^4 = c^8$;

$$\left[\begin{array}{l} 4-x = c^2, \\ 4-x = -c^2, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_1 = 4-c^2, \\ x_2 = 4+c^2. \end{array}\right.$$

Исследование.

1) Заметим, что $x_2 = 4 + c^2$ не удовлетворяет условию $x \in (-4;\ 4)$.

$$2)\begin{cases} x_1 = 4-c^2, \\ 4-c^2 > -4, \\ 4-c^2 < 4, \\ c > 0, \\ c \ne 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 4-c^2, \quad (*) \\ c > 0, \\ c < 2\sqrt{2}, \\ c \ne 1 \end{cases} \qquad \text{(рис. 471).}$$

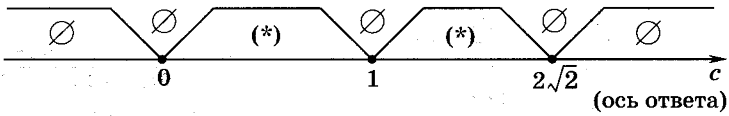


Рис. 471

Ответ: 1) Если $c \in (0; 1) \cup (1; 2\sqrt{2})$, то $x = 4 - c^2$.
2) В остальных случаях решений нет.

№ 9. Решите уравнение

$$\log_a \left(\frac{a+1}{a+3}x^2\right) = \log_a \left(\frac{a-2}{a+3}(x-1)\right).$$

Решение.

$$\text{ООУ:} \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ x \neq 0, \\ (a-2)(x-1) > 0. \end{cases}$$

$$\frac{a+1}{a+3}x^2 = (a-2)(x-1)/(a+3),$$

$$(a+1)x^2 - (a-2)x + a - 2 = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1), учитывая область определения данного уравнения, является уравнением второй степени, дискриминант которого $D = 12 - 3a^2$.

Рассмотрим ряд случаев.

а) $D < 0$, т. е. $a \in (2; +\infty)$. Решений нет.

б) $D = 0$, $a = 2$: $x = 0$. Решений нет, так как $x = 0$ не является допустимым.

в) $D > 0$, т. е. $a \in (0; 1) \cup (1; 2)$:

$$x_{1,2} = \frac{a - 2 \pm \sqrt{12 - 3a^2}}{2(a+1)}.$$

Исследование.

1) Подставим $x = 0$ в уравнение (1). Получим $a = 2$. Но при $a = 2$ решений нет.

$$2) \begin{cases} x_1 = \dfrac{a - 2 + \sqrt{12 - 3a^2}}{2(a+1)}, \\ a \in (0; 1) \cup (1; 2), \\ (a-2)(x_1 - 1) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a - 2 + \sqrt{12 - 3a^2}}{2(a+1)}, \\ a \in (0; 1) \cup (1; 2), \\ x_1 < 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a-2+\sqrt{12-3a^2}}{2(a+1)}, \\ a \in (0;\,1) \cup (1;\,2), \\ \dfrac{a-2+\sqrt{12-3a^2}}{2(a+1)} < 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a-2+\sqrt{12-3a^2}}{2(a+1)}, \\ a \in (0;\,1) \cup (1;\,2), \\ \sqrt{12-3a^2} < a+4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a-2+\sqrt{12-3a^2}}{2(a+1)}, \\ a \in (0;\,1) \cup (1;\,2), \\ (a+1)^2 > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a-2+\sqrt{12-3a^2}}{2(a+1)}, \\ a \in (0;\,1) \cup (1;\,2). \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x_2 = \dfrac{a-2-\sqrt{12-3a^2}}{2(a+1)}, \\ a \in (0;\,1) \cup (1;\,2), \\ \dfrac{a-2-\sqrt{12-3a^2}}{2(a+1)} < 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{a-2-\sqrt{12-3a^2}}{2(a+1)}, \\ a \in (0;\,1) \cup (1;\,2), \\ \sqrt{12-3a^2} > -a-4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{a-2-\sqrt{12-3a^2}}{2(a+1)}, \\ a \in (0;\,1) \cup (1;\,2). \end{cases}$$

Отметим результаты на оси ответа (рис. 472).

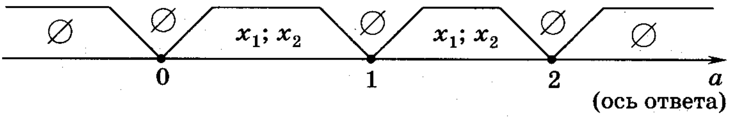


Рис. 472

Ответ: 1) Если $a \in (0;\,1) \cup (1;\,2)$,

то $x_{1,\,2} = \dfrac{a-2 \pm \sqrt{12-3a^2}}{2(a+1)}$.

2) В остальных случаях решений нет.

№ 10. Найдите значения α, если $2 < \alpha < 5$, при которых $2 \leqslant x \leqslant 3$ и уравнение $\log_2(3 - |\sin \alpha x|) = \cos(\pi x - \pi/6)$ имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Учтем, что $2 \leqslant 3 - |\sin \alpha x| \leqslant 3$ при любом $x \in \mathrm{R}$ и $-1 \leqslant \cos(\pi x - \pi/6) \leqslant 1$ при $x \in \mathrm{R}$. Перейдем к уравнению $3 - |\sin \alpha x| = 2^{\cos(\pi x - \pi/6)}$.

Оценим левую и правую части последнего уравнения

$$\begin{cases} 2 \leqslant 3 - |\sin \alpha x| \leqslant 3, \\ 1/2 \leqslant 2^{\cos(\pi x - \pi/6)} \leqslant 2. \end{cases} \quad \text{Откуда} \quad \begin{cases} |\sin \alpha x| = 1, \\ \cos(\pi x - \pi/6) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x = \pi/2 + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}, \\ \pi x = \pi/6 + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x = \pi/2 + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}, \\ x = 1/6 + 2n,\ n \in \mathrm{Z}. \end{cases}$$

Учитывая, что $2 \leqslant x \leqslant 3$, заключаем, что $n = 1$. Тогда $x = 13/6$. Подставим найденное значение x в первое уравнение системы: $13\alpha/6 = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, $\alpha = 3\pi/13 + 6\pi k/13$, $k \in \mathrm{Z}$. Только при $k = 1$ и $k = 2$ получим значения α, удовлетворяющие условию $2 < \alpha < 5$. При $k = 1$ $\alpha = 9\pi/13$; при $k = 2$ $\alpha = 15\pi/13$.

Ответ: $\alpha = 9\pi/13$; $\alpha = 15\pi/13$.

№ 11. Решите уравнение

$1 + \log_a(1 - x) \cdot \log_x a = 2/\log_a x$.

Решение.

$$\text{ООУ:} \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

Перейдем к логарифмам по основанию a.

$1 + (\log_a(1 - x))/\log_a x = 2/\log_a x$,

$\log_a x + \log_a(1 - x) = 2$; $x(1 - x) = a^2$; $x^2 - x + a^2 = 0$.

Получили уравнение второй степени с дискриминантом $\mathrm{D} = 1 - 4a^2$.

1) $\mathrm{D} < 0$, т. е. $a > 1/2$. Решений нет.

2) $\mathrm{D} = 0$, т. е. $a = 1/2$: $x_{1,2} = 1/2$.

3) $\mathrm{D} > 0$, т. е. $0 < a < 1/2$: $x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - a^2}$.

Легко видеть, что $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$ при $0 < a < 1/2$.

Заполним ось ответа (рис. 473).

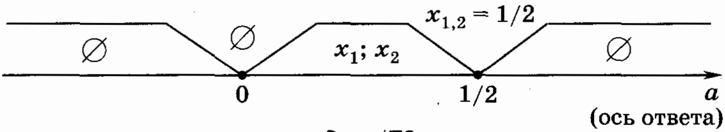


Рис. 473

Ответ: 1) Если $0 < a < 1/2$, то два различных корня $x_{1,\,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - a^2}$.

2) Если $a = 1/2$, то $x_{1,\,2} = 1/2$.

3) В остальных случаях решений нет.

№ 12. Решите уравнение $\log_2 (5 - |x^2 - 6x + 8|) = a$.

Решение.

Переходим к равносильному уравнению

$5 - |x^2 - 6x + 8| = 2^a$.

Раскрыв модуль, получим две системы:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x^2 - 6x + 2^a + 3 = 0, \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 4, \\ x \leqslant 2, \end{array}\right. \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x^2 - 6x + 13 - 2^a = 0, \\ 2 < x < 4. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решаем систему (1) и отмечаем результаты на оси (1) (рис. 474).

$x^2 - 6x + 2^a + 3 = 0$, $D = 6 - 2^a$.

а) $D_1 < 0$: $2^a > 6$, $a > \log_2 6$. Система (1) решений не имеет.

б) $D_1 = 0$, $a = \log_2 6$: $x_{1,\,2} = 3$. Но $3 \notin (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$. В этом случае тоже решений нет.

в) $D_1 > 0$, $a < \log_2 6$: $x_1 = 3 + \sqrt{6 - 2^a}$, $x_2 = 3 - \sqrt{6 - 2^a}$.

Исследование.

1) $\begin{cases} x_1 = 3 + \sqrt{6 - 2^a}, \\ \left[\begin{array}{l} 3 + \sqrt{6 - 2^a} \geqslant 4, \\ 3 + \sqrt{6 - 2^a} \leqslant 2, \end{array}\right. \\ a < \log_2 6, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 3 + \sqrt{6 - 2^a}, \\ 6 - 2^a \geqslant 1, \\ a < \log_2 6, \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 3 + \sqrt{6 - 2^a}, \\ a \leqslant \log_2 5. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_2 = 3 - \sqrt{6 - 2^a}, \\ \left[\begin{array}{l} 3 - \sqrt{6 - 2^a} \geqslant 4, \\ 3 - \sqrt{6 - 2^a} \leqslant 2, \end{array}\right. \\ a < \log_2 6, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 3 - \sqrt{6 - 2^a}, \\ \sqrt{6 - 2^a} \geqslant 1, \\ a < \log_2 6, \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = 3 - \sqrt{6 - 2^a}, \\ a \leqslant \log_2 5. \end{cases}$

Если $a = \log_2 5$, то $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

А теперь рассмотрим систему (2).

$x^2 - 6x + 13 - 2^a = 0$, $D_1 = 2^a - 4$.

а) $D_1 < 0$, т. е. $a < 2$. Решений у системы (2) нет.

б) $D_1 = 0$, $a = 2$: $x_{3,4} = 3$.

в) $D_1 > 0$, $a > 2$: $x_3 = 3 + \sqrt{2^a - 4}$; $x_4 = 3 - \sqrt{2^a - 4}$.

Исследование.

1) $\begin{cases} x_3 = 3 + \sqrt{2^a - 4}, \\ 3 + \sqrt{2^a - 4} > 2, \\ 3 + \sqrt{2^a - 4} < 4, \\ a > 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = 3 + \sqrt{2^a - 4}, \\ 2^a < 5, \\ a > 2, \end{cases}$

$\begin{cases} x_3 = 3 + \sqrt{2^a - 4}, \\ 2 < a < \log_2 5. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_4 = 3 - \sqrt{2^a - 4}, \\ 3 - \sqrt{2^a - 4} > 2, \\ 3 - \sqrt{2^a - 4} < 4, \\ a > 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = 3 - \sqrt{2^a - 4}, \\ \sqrt{2^a - 4} < 1, \\ a > 2, \end{cases}$

$\begin{cases} x_4 = 3 - \sqrt{2^a - 4}, \\ 2 < a < \log_2 5. \end{cases}$

Заполняем ось (2) (рис. 474) и объединяем множества решений (рис. 474, ось ответа).

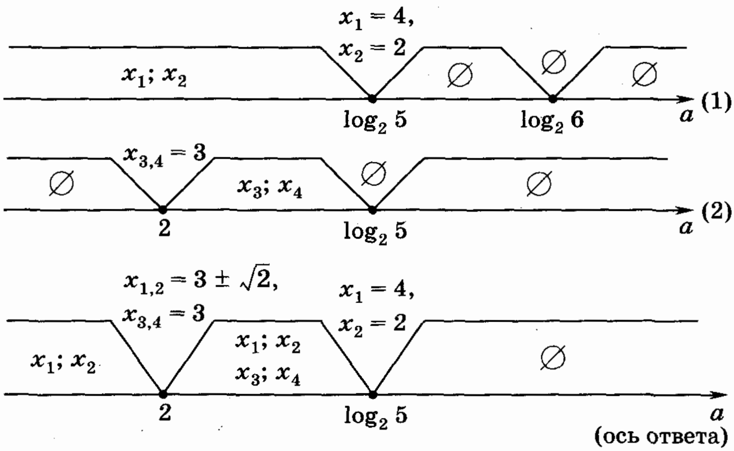


Рис. 474

<u>Ответ:</u> 1) Если $a \in (2; \log_2 5)$, то четыре корня

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{6 - 2^a}$,

$x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{2^a - 4}$.

2) Если $a = 2$, то $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}$; $x_{3,4} = 3$.

3) Если $a = \log_2 5$, то $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

4) Если $a \in (-\infty; 2)$, то $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{6 - 2^a}$.

5) Если $a > \log_2 5$, то решений нет.

А теперь решим это уравнение графически. Построим сначала график функции

$y = |x^2 - 6x + 8|$ (1) (рис. 475).

Решив неравенства $-5 < x^2 - 6x + 8 < 5$, найдем значения x: $3 - \sqrt{6} < x < 3 + \sqrt{6}$.

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in (3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6}). \end{cases}$

В области определения данное уравнение равносильно уравнению $|x^2 - 6x + 8| = 5 - 2^a$. Рассмотрим теперь ряд случаев, используя рис. 475.

1) $1 < 5 - 2^a < 5$, т. е. $a < 2$. Тогда прямая $y = 5 - 2^a$ пересекает график функции (1) в двух точках. Данное уравнение имеет два корня, которые найдем, решив уравнение $x^2 - 6x + 8 = 5 - 2^a$; $x_1 = 3 - \sqrt{6 - 2^a}$; $x_2 = 3 + \sqrt{6 - 2^a}$.

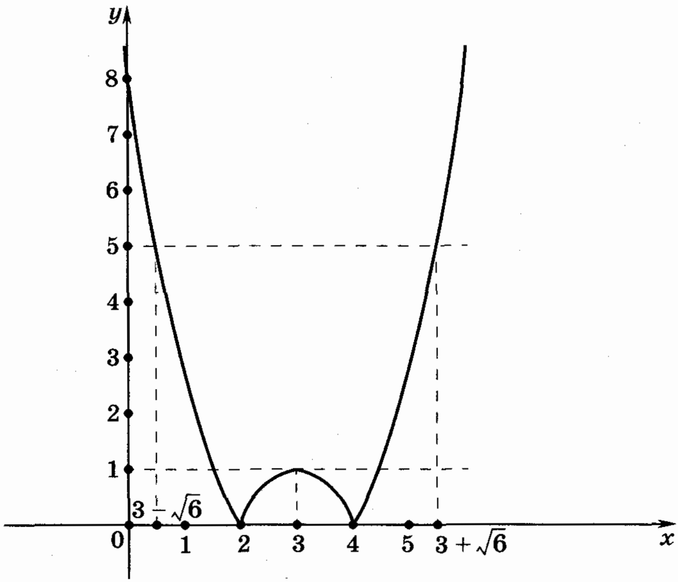


Рис. 475

2) $5 - 2^a = 1$, т. е. $a = 2$. Уравнение имеет три корня: $x_1 = 3 - \sqrt{2}$; $x_2 = 3 + \sqrt{2}$; $x_{3,4} = 3$.

3) $0 < 5 - 2^a < 1$, т. е. $2 < a < \log_2 5$. Уравнение имеет четыре корня. Это $x_1 = 3 - \sqrt{6 - 2^a}$; $x_2 = 3 + \sqrt{6 - 2^a}$, а также корни уравнения $x^2 - 6x + 8 = 2^a - 5$: $x_3 = 3 + \sqrt{2^a - 4}$; $x_4 = 3 - \sqrt{2^a - 4}$.

4) $5 - 2^a = 0$, т. е. $a = \log_2 5$. Уравнение имеет два корня $x_1 = 2$; $x_2 = 4$.

5) $a > \log_2 5$. Решений нет.

№ 13. При каких значениях a уравнение

$\log_{x-1}(x + a) = 1/2$

имеет единственное решение?

$$\text{ООУ: } \begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x > 1, \\ x \neq 2, \\ x > -a. \end{cases}$$

По определению логарифма имеем $x + a = \sqrt{x - 1}$.
Возведем обе части уравнения в квадрат:
$x^2 + 2ax + a^2 = x - 1$, $x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 1 = 0$.
$\mathrm{D} = -4a - 3$.
а) $-4a - 3 < 0$, $a > -3/4$. Решений нет.
б) $a = -3/4$: $x_{1,2} = 5/4$.
в) $a < -3/4$: $x_1 = (1 - 2a + \sqrt{-4a - 3})/2$;
$x_2 = (1 - 2a - \sqrt{-4a - 3})/2$.
<u>Исследование</u>.

$$1) \begin{cases} x_1 = (1 - 2a + \sqrt{-4a - 3})/2, \\ (1 - 2a + \sqrt{-4a - 3})/2 > -a, \\ (1 - 2a + \sqrt{-4a - 3})/2 > 1, \\ (1 - 2a + \sqrt{-4a - 3})/2 \neq 2, \\ a < -3/4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = (1 - 2a + \sqrt{-4a - 3})/2, \\ \sqrt{-4a - 3} > -1, \\ \sqrt{-4a - 3} > 1 + 2a, \\ \sqrt{-4a - 3} \neq 3 + 2a, \\ a < -3/4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = (1 - 2a + \sqrt{-4a - 3})/2, \\ -4a - 3 \neq 9 + 12a + 4a^2, \\ a < -3/4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = (1 - 2a + \sqrt{-4a - 3})/2, \\ a < -3/4, \\ a \neq -1. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x_2 = (1 - 2a - \sqrt{-4a - 3})/2, \\ 1 - 2a - \sqrt{-4a - 3} > 2, \\ 1 - 2a - \sqrt{-4a - 3} > -2a, \\ 1 - 2a - \sqrt{-4a - 3} \neq 4, \\ a < -3/4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = (1 - 2a - \sqrt{-4a - 3})/2, \\ \sqrt{-4a - 3} < -1 - 2a, \\ \sqrt{-4a - 3} < 1, \\ \sqrt{-4a - 3} \neq -2a - 3, \\ a < -3/, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = (1 - 2a - \sqrt{-4a - 3})/2, \\ a > -1, \\ a < -3/4. \end{cases}$$

Отмечаем результаты на оси параметра (рис. 476).

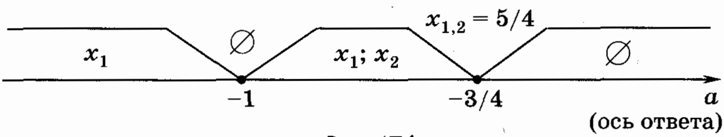


Рис. 476

<u>Ответ</u>: Уравнение имеет единственное решение, если $a = -3/4$ или $a < -1$.

№ 14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \lg(x+y) = \lg x + \lg y, \\ \lg(x+ay) = \lg x + 2\lg y. \end{cases}$$

Решение.

ООС: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ y > 0, \\ x + ay > 0, \\ x > 0. \end{cases}$

Перейдем к системе, равносильной данной:

$\begin{cases} x + y = xy, \\ x + ay = xy^2, \\ x > 0,\ y > 0, \\ a \in \mathrm{R}. \end{cases}$ И далее: $\begin{cases} x + ay = xy^2, \\ ay - y = xy^2 - xy, \\ x > 0,\ y > 0, \\ a \in \mathrm{R}, \end{cases}$

$\begin{cases} x + ay = xy^2, \\ y(a-1) = xy(y-1), \\ x > 0,\ y > 0,\ a \in \mathrm{R}, \end{cases}$ $\begin{cases} x + ay = xy^2, \\ x(y-1) = a - 1, \\ x > 0,\ y > 0, \\ a \in \mathrm{R}, \end{cases}$

$\begin{cases} y = (a-1)/x + 1, \\ x + ay = xy^2, \\ x > 0,\ y > 0, \\ a \in \mathrm{R}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = (a-1+x)/x, \\ x + \dfrac{(a-1)a + ax}{x} = \dfrac{(a-1+x)^2}{x}, \\ x > 0,\ y > 0, \\ a \in \mathrm{R}, \end{cases}$

$\begin{cases} y = (a-1+x)/x, \\ x(a-2) = a - 1, \\ x > 0,\ y > 0,\ a \in \mathrm{R}. \end{cases}$

1) Если $a = 2$, то система решений не имеет.

2) $\begin{cases} a \neq 2, \\ x = (a-1)/(a-2), \\ y = a - 1, \\ x > 0,\ y > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = (a-1)/(a-2), \\ y = a - 1, \\ a > 2 \end{cases}$ (*)

(рис. 477).

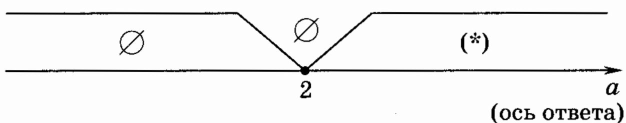


Рис. 477

Ответ: 1) Если $a > 2$, то $x = (a-1)/(a-2)$, $y = a - 1$.
2) Если $a \leqslant 2$, то решений нет.

№ 15. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} 2 + \log_2 y = \log_2 (x + 3y), \\ y = x + 2a - 4 + 2(x-a)^2 \end{cases}$ имеет два решения.

Решение.

Данная система равносильная системе

$\begin{cases} 4y = x + 3y, \\ y = x + 2a - 4 + 2(x-a)^2, \\ y > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = y, \\ x = x + 2a - 4 + 2(x-a)^2, \\ x > 0,\ y > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x = y, \\ x = x + 2a - 4 + 2(x-a)^2, \\ x > 0,\ y > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = y, \\ x^2 - 2ax + a^2 + a - 2 = 0, \\ x > 0,\ y > 0. \end{cases}$

Для того чтобы данная система уравнений имела два решения, надо узнать, при каких значениях a уравнение второй степени $x^2 - 2ax + a^2 + a - 2 = 0$ имеет два различных положительных корня. Покажем схематично, как должны располагаться параболы $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 + a - 2$ (рис. 478).

Составим и решим систему $\begin{cases} f(0) > 0, \\ -\dfrac{B}{2A} > 0, \\ D_1 > 0. \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 + a - 2 > 0, \\ a > 0, \\ a^2 - a^2 - a + 2 > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 + a - 2 > 0, \\ a > 0, \\ a < 2 \end{cases}$ (рис. 479).

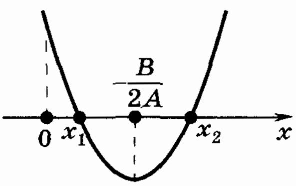


Рис. 478

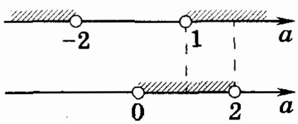


Рис. 479

Ответ: $a \in (1; 2)$.

№ 16. При каких значениях параметра a уравнение $2\log_3^2 x - |\log_3 x| + a = 0$ имеет четыре корня?

Решение.

ООУ: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x > 0. \end{cases}$

Пусть $\log_3 x = t$: $2t^2 - |t| + a = 0$. Раскроем модуль:

$$\begin{cases} t = 0, \\ a = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} t > 0, \\ 2t^2 - t + a = 0, \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} t < 0, \\ 2t^2 + t + a = 0. \end{cases} \quad (3)$$

(1): Если $a = 0$, то данное уравнение примет вид $2\log_3^2 x - |\log_3 x| = 0$. Оно имеет три корня.

(2): Узнаем, при каких значениях a уравнение $2t^2 - t + a = 0$ системы (2) имеет два положительных корня (рис. 480).

$$\begin{cases} a > 0, \\ 1 - 8a > 0, \end{cases} \quad 0 < a < 1/8.$$

(3): А теперь определим, при каких значениях a уравнение $2t^2 + t + a = 0$ системы (3) имеет два отрицательных корня (рис. 481).

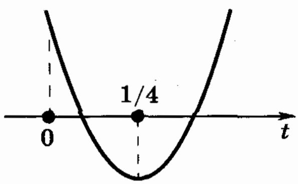


Рис. 480

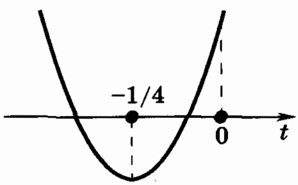


Рис. 481

$$\begin{cases} a > 0, \\ 1 - 8a > 0, \end{cases} \quad 0 < a < 1/8.$$

Итак, при $a \in (0; 1/8)$ данное уравнение имеет четыре корня.

Ответ: (0; 1/8).

№ 17. Найдите значения m, при которых корни уравнения

$$(m-1)\log_3^2(x-2) - 2(m+1)\log_3(x-2) + m - 3 = 0$$

меньше 3.

Решение.

ООУ: $\begin{cases} m \in R, \\ 2 < x < 3. \end{cases}$

Пусть $\log_3(x-2) = t$. Получим уравнение

$(m-1)t^2 - 2(m+1)t + m - 3 = 0$. (1)

1) Если $m = 1$, то $t = -1/2$: $\log_3(x-2) = -1/2$,

$x = 2 + 1/\sqrt{3}$. Видим, что $2 < 2 + 1/\sqrt{3} < 3$.

2) Пусть теперь $m \neq 1$. Имеем уравнение второй степени относительно t.

Учитывая область определения данного уравнения, нам надо найти такие значения m, при которых $2 < x < 3$. А тогда $0 < x - 2 < 1$ и, следовательно, $\log_3(x-2) < 0$. Итак, будем искать такие значения m, при которых корни уравнения (1) меньше 0.

а) $m > 1$. Покажем схематично, как должны при этом располагаться параболы

$f(t) = (m-1)t^2 - 2(m+1)t + m - 3$ (рис. 482).

$-\dfrac{B}{2A} = \dfrac{m+1}{m-1}$. Если $m > 1$, то $\dfrac{m+1}{m-1} > 0$. Значит, такой случай невозможен.

б) $m < 1$. $\begin{cases} m < 1, \\ -\dfrac{B}{2A} < 0, \\ f(0) < 0 \text{ (рис. 483)}, \\ D_1 \geqslant 0; \end{cases}$

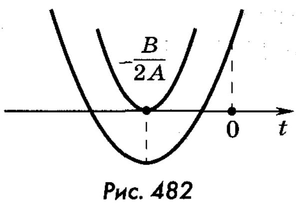


Рис. 482

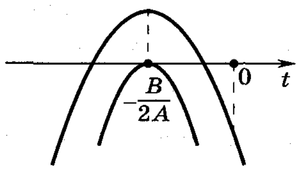


Рис. 483

$$\begin{cases} m < 1, \\ \dfrac{m+1}{m-1} < 0, \\ m - 3 < 0, \\ (m+1)^2 - (m-1)(m-3) \geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} m < 1, \\ m > -1, \\ m < 3, \\ m \geqslant 1/3, \end{cases} \quad 1/3 \leqslant m < 1.$$

Ответ: $1/3 \leqslant m \leqslant 1$.

№ 18. Найдите значение x, удовлетворяющее уравнению $\log_{x+2|a|+1}(|a|x + 3) = 2\log_{6-x}(5 - \sqrt{7+x})$ при любом значении a.

Решение.

Если такое значение x существует, то оно будет удовлетворять уравнению при любом $a \in \mathrm{R}$, в том числе и при $a = 1$.

Тогда при $a = 1$ получим:

$$2\log_{6-x}(5 - \sqrt{7+x}) = 1. \qquad (1)$$

Решаем это уравнение: $6 - x = (5 - \sqrt{7+x})^2$,

$6 - x = 25 - 10\sqrt{7+x} + 7 + x$, $5\sqrt{7+x} = 13 + x$,

$x^2 + x - 6 = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.

Оба найденных значения x являются корнями уравнения (1).

Подставим теперь $x_2 = -3$ в данное уравнение: $\log_{2|a|-2}(-3|a| + 3) = 1$, $-3|a| + 3 = 2|a| - 2$, $a = \pm 1$. Но при $a = \pm 1$ выражение $2|a| - 2$, являющееся основанием логарифма, равно 0.

Значит, $x_2 = -3$ не является корнем данного уравнения ни при каких значениях a.

Подставим $x_1 = 2$ в данное уравнение:

$\log_{2|a|+3}(2|a| + 3) = 1$.

Это равенство верно при любом $a \in \mathrm{R}$.

Ответ: $x = 2$.

Упражнения для самостоятельного решения

1) Решите уравнение $\lg 2x + \lg(2 - x) = \lg\lg a$.

2) Решите уравнение $\log_3 x + 3\log_a x + \log_9 x = 5$.

3) Найдите такие значения параметра a, при которых уравнение $\log_{2x}(ax + 1) = 1/2$ имеет единственное решение.

4) Укажите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y + \ln\dfrac{|y|}{y} = x, \\ y + 2(x + a)^2 = x + 2a + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a.

5) Определите значения параметра k так, чтобы один из корней уравнения

$$x^2 - 2\log_k(k + 1)\cdot x + \log_k(k - 4) = 0$$

был меньше 0, а другой — больше 1.

6) При каких значениях параметра a все корни уравнения

$$(a - 1)\log_3^2(x - 3) + 2(a + 1)\log_3(x - 3) + a - 3 = 0$$

меньше 4?

7) Решите уравнение $\log_3(31 - |x^2 - 6x + 5|) = b$.

8) Решите уравнение $\lg(ax)/\lg(x + 1) = 2$.

9) Решите уравнение $\log_{1/3}(9^x + a) + \log_3(2\cdot 3^x) = 0$.

10) При каких значениях c уравнение

$$\lg(x^2 + 2cx) - \lg(8x - 6c - 3) = 0$$

имеет единственное решение?

11) Найдите значение x, удовлетворяющее уравнению $\log_{x + a^2 + 2}(a^2x + 3) = \log_{x + 1}(x^2 - 2x + 3)$ при любом значении a.

5. Логарифмические неравенства с параметром

5.1. Подготовительные неравенства

№ 1. Решите неравенство $\log_a x > 0$.

Решение.

Данное неравенство в его области определения равносильно совокупности систем
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ x > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < x < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: 1) Если $a < 0$ или $a = 1$, то решений нет.
2) Если $a > 1$, то $x \in (1; +\infty)$.
3) Если $0 < a < 1$, то $x \in (0; 1)$.

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 484).

Координаты каждой из точек заштрихованных областей удовлетворяют данному неравенству.

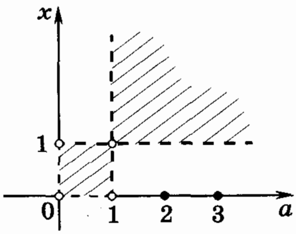


Рис. 484

№ 2. Решите неравенство $\log_a (x - 2a) > 1$.

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ x - 2a > a; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x - 2a > 0, \\ x - 2a < a; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ x > 3a; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 2a < x < 3a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ запишите сами по рис. 485.

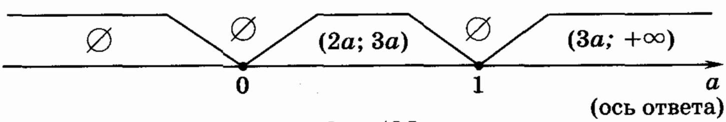


Рис. 485

№ 3. Решите неравенство $\lg(ax - 1) > 0$.

Решение.

Данное неравенство равносильно неравенству $ax - 1 > 1$.

Решаем его: $ax > 2$.

1) $a = 0$: решений нет.

2) $a > 0$: $x > 2/a$.

3) $a < 0$: $x < 2/a$.

Ответ списывается с оси ответа (рис. 486).

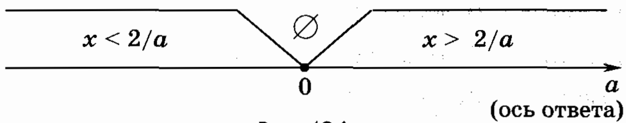


Рис. 486

№ 4. Решите неравенство $\lg(2 - (b - 1)x) < 1$.

Решение.

Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2 - (b-1)x < 10, \\ 2 - (b-1)x > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (b-1)x > -8, \\ (b-1)x < 2. \end{cases}$$

1) Если $b = 1$, то $x \in \mathrm{R}$.

2) Если $b > 1$, то $-\dfrac{8}{b-1} < x < \dfrac{2}{b-1}$.

3) Если $b < 1$, то $\dfrac{2}{b-1} < x < -\dfrac{8}{b-1}$.

№ 5. Решите неравенство $\log_{1/2}(cx + c - 2) > 0$.

Решение.

Переходим к системе, равносильной данному неравенству: $\begin{cases} cx + c - 2 < 1, \\ cx + c - 2 > 0, \end{cases} \begin{cases} cx < 3 - c, \\ cx > 2 - c. \end{cases}$

1) Если $c = 0$, то решений нет.

2) Если $c > 0$, то $(2 - c)/c < x < (3 - c)/c$.

3) Если $c < 0$, то $(3 - c)/c < x < (2 - c)/c$.

№ 6. Решите неравенство

$\log_{1/2}(3+\sqrt{ax}) < x^2 + x + 1.$

Решение.

ООН: $\begin{cases} ax \geqslant 0, \\ a \in R. \end{cases}$

Заметим, что в ООН левая часть данного неравенства принимает отрицательные значения, а правая — положительные. Поэтому исходному неравенству удовлетворяют все пары значений x и a из ООН. Найдем их:

1) Если $a = 0$, то $x \in R$.

2) Если $a > 0$, то $x \geqslant 0$.

3) Если $a < 0$, то $x \leqslant 0$.

№ 7. Решите неравенство $\log_5(1 - a^2x^2) < |x| + 1$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a \in R, \\ a^2x^2 < 1. \end{cases}$

В ООН верны неравенства $\log_5(1 - a^2x^2) \leqslant 0$; $|x| + 1 > 0$. Поэтому достаточно решить неравенство $a^2x^2 < 1$.

1) Если $a = 0$, то $x \in R$.

2) Если $a \neq 0$, то $|x| < 1/|a|$:

а) при $a > 0$ $|x| < 1/a$;

б) при $a < 0$ $|x| < -1/a$.

Ответ запишите самостоятельно по рис. 487.

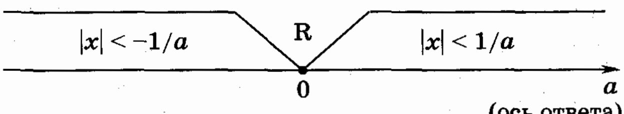


Рис. 487

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 488).

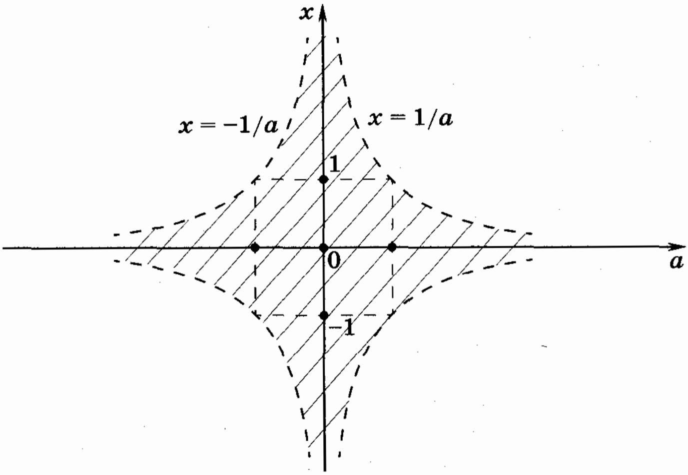


Рис. 488

№ 8. Решите неравенство

$\log_{1/3}(1+|\sin a\cdot x|)\geqslant(x-2)^2.$

Решение.

ООН: $\begin{cases} a\in\mathrm{R}, \\ x\in\mathrm{R}. \end{cases}$

Учитывая, что $\log_{1/3}(1+|\sin a\cdot x|)\leqslant 0$, $(x-2)^2\geqslant 0$, заключаем, что данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \log_{1/3}(1+|\sin a\cdot x|)=0, \\ x=2. \end{cases}$$

Решим относительно a уравнение

$\log_{1/3}(1+|\sin 2a|)=0$:

$1+|\sin 2a|=1$, $|\sin 2a|=0$,

$a=\pi k/2$, $k\in\mathrm{Z}$.

Ответ: 1) Если $a=\pi k/2$, $k\in\mathrm{Z}$, то $x=2$.
2) Если $a\neq\pi k/2$, $k\in\mathrm{Z}$, то данное неравенство решений не имеет.

№ 9. Решите неравенство $(b-1)\cdot\log_2(bx+3x-1)\geqslant 0$.

Решение.

1) $b=1$: $x+3x-1>0$, $x>1/4$.

2) $b>1$: $\log_2(bx+3x-1)\geqslant 0$, $x(b+3)-1\geqslant 1$, $x(b+3)\geqslant 2$, $x\geqslant 2/(b+3)$.

3) $b<1$: $\log_2(bx+3x-1)\leqslant 0$,

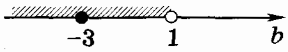


Рис. 490

$$\begin{cases} bx+3x-1\leqslant 1, \\ bx+3x-1>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(b+3)\leqslant 2, \\ x(b+3)>1 \text{ (рис. 490).} \end{cases}$$

Отметим на рисунке точку -3, при переходе через которую выражение $(b+3)$ меняет знак.

а) Пусть $b=-3$: $\begin{cases} 0\cdot x\leqslant 2, \\ 0\cdot x>1. \end{cases}$ Решений нет.

б) $-3<b<1$: $\begin{cases} x\leqslant 2/(b+3), \\ x>1/b+3), \end{cases}$ $x\in(1/(b+3);\,2/(b+3]$.

в) $b<-3$: $\begin{cases} x\geqslant 2/(b+3), \\ x<1/(b+3), \end{cases}$ $x\in[2/(b+3);\,1/(b+3))$.

Заполняем ось ответа (рис. 489).

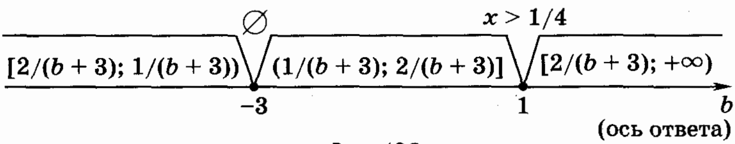


Рис. 489

№ 10. Решите неравенство $(x-a)\cdot\log_2(ax+1)<0$.

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x-a>0, \\ \log_2(ax+1)<0; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x-a<0, \\ \log_2(ax+1)>0. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решаем сначала систему (1):

$$\begin{cases} x-a>0, \\ ax+1<1, \\ ax+1>0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x>a, \\ ax<0, \\ ax>-1. \end{cases}$$

1) Пусть $a=0$: система (1) решений не имеет.

2) $a>0$: $\begin{cases} x>a, \\ x<0, \\ x>-1/a. \end{cases}$ Система несовместна.

3) $a<0$: $\begin{cases} x>a, \\ x>0, \\ x<-1/a, \end{cases}$ $0<x<-1/a$ (ось (1) на рис. 491).

Теперь решим систему (2): $\begin{cases} x<a, \\ ax+1>1, \end{cases} \begin{cases} x<a, \\ ax>0. \end{cases}$

1) $a=0$: решений нет.

2) $a>0$: $\begin{cases} x<a, \\ x>0, \end{cases}$ $0<x<a$.

3) $a<0$: $\begin{cases} x<a, \\ x<0, \end{cases}$ $x<a$ (ось (2) на рис. 491).

Объединим множества решений (ось ответа на рис. 491).

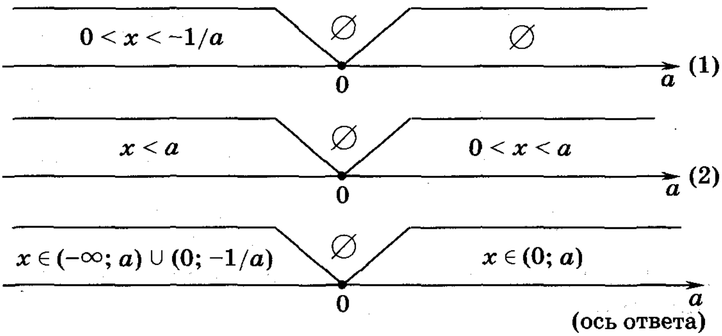


Рис. 491

<u>Ответ</u>: 1) Если $a>0$, то $x \in (0; a)$.
2) Если $a<0$, то $x \in (-\infty; a) \cup (0; -1/a)$.
3) Если $a=0$, то решений нет.

№ 11. Решите неравенство $\sqrt{x-a}\cdot\log_{1/5}(2a+x)>0$.

<u>Решение</u>.

Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} x-a>0, \\ \log_{1/5}(2a+x)>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-a>0, \\ 2a+x<1, \\ 2a+x>0, \end{cases} \quad \begin{cases} x>a, \\ x<1-2a, \\ x>-2a. \end{cases}$$

Решим уравнения $a=1-2a$ и $a=-2a$: $a=1/3$ и $a=0$.

1) $a=0$: $\begin{cases} x>0, \\ x<1, \\ x>0, \end{cases}$ $0<x<1$.

2) $a=1/3$: $\begin{cases} x>1/3, \\ x<1/3, \\ x>-2/3. \end{cases}$

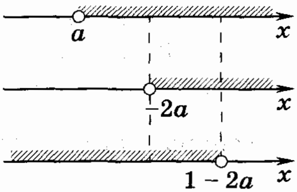


Рис. 492

Система несовместна.

3) $a<0$:
$x\in(-2a;\ 1-2a)$ (рис. 492).

4) $0<a<1/3$:
$x\in(a;\ 1-2a)$ (рис. 493).

5) $a>1/3$: Решений нет (рис. 494.).

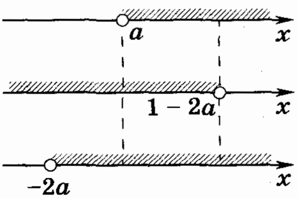


Рис. 493

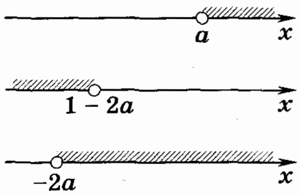


Рис. 494

Объединяем множества решений на оси ответа (рис. 495).

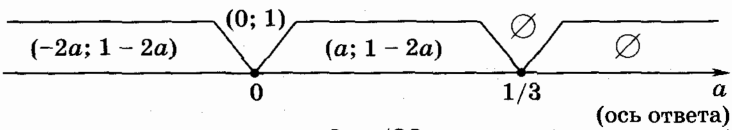


Рис. 495

Ответ: 1) Если $a \in (-\infty; 0]$, то $x \in (-2a; 1 - 2a)$.
2) Если $a \in (0; 1/3)$, то $x \in (a; 1 - 2a)$.
3) Если $a \geqslant 1/3$, то решений нет.

№ 12. Решите неравенство
$\log_2((b-1)x+2) > \log_2(2x-b)$.

Решение.
Составляем систему неравенств, равносильную данному неравенству: $\begin{cases}(b-1)x+2 > 2x-b,\\ 2x-b>0;\end{cases}$

$\begin{cases}(b-3)x > -2-b,\\ x > b/2.\end{cases}$

Рассмотрим ряд случаев.

1) $b=3$: $\begin{cases}0\cdot x > -5,\\ x>3/2,\end{cases}$ $x > 3/2$.

2) $b>3$: $\begin{cases}x > \dfrac{2+b}{3-b},\\ x > b/2,\end{cases}$ $x > b/2$.

3) $b<3$: $\begin{cases}x < \dfrac{2+b}{3-b},\\ x > b/2.\end{cases}$

Сравним дроби $(2+b)/(3-b)$ и $b/2$: $\dfrac{2+b}{3-b} - \dfrac{b}{2} = \dfrac{4+2b-3b+b^2}{2(3-b)} = \dfrac{b^2-b+4}{2(3-b)}$. Видим, что при $b<3$ справедливо неравенство $(2+b)/(3-b) > b/2$.

Значит, $x \in \left(b/2; \dfrac{2+b}{3-b}\right)$.

Заполняем ось ответа (рис. 496).

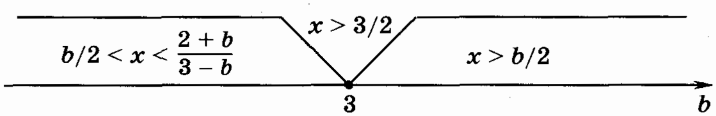


Рис. 496

Ответ: 1) Если $b \geqslant 3$, то $x \in (b/2; +\infty)$.
2) Если $b < 3$, то $x \in (b/2; (2+b)/(3-b))$.

№ 13. Решите неравенство

$\log_{1/\pi}(x^2 - ax) < \log_{1/\pi}(x - a)$.

Решение.

Достаточно решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - ax > x - a, \\ x - a > 0: \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-a)(x-1) > 0, \\ x > a, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x > a. \end{cases}$$

1) Если $a \geqslant 1$, то $x > a$.

2) Если $a < 1$, то $x > 1$.

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx) (рис. 497).

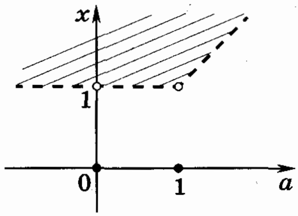


Рис. 497

№ 14. Решите неравенство $\log_{x+b}(bx - 3) > \log_{x+b} b$.

Решение.

Рассматриваем совокупность систем, равносильную данному неравенству в области его определения.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b > 0, \\ x + b > 1, \\ bx - 3 > b, \end{cases} \\ \begin{cases} b > 0, \\ 0 < x + b < 1, \\ bx - 3 < b, \\ bx - 3 > 0, \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b > 0, \\ x > 1 - b, \\ x > (3 + b)/b, \end{cases} \\ \begin{cases} b > 0, \\ x > -b, \\ x < 1 - b, \\ x > 3/b, \\ x < (3 + b)/b, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} b > 0, \\ x > 1 - b, \\ x > (3 + b)/b, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} b > 0, \\ x < 1 - b, \\ x > 3/b, \\ x < (3 + b)/b. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решаем систему (1). Сравним выражения $(1 - b)$ и $(3 + b)/b$, если $b > 0$: $(1 - b) - (3 + b)/b = (-b^2 - 3)/b$.

Видим, что $1 - b < (3 + b)/b$. Значит: $\begin{cases} b > 0, \\ x > (3 + b)/b. \end{cases}$

Теперь решаем систему (2). Для этого от системы (2) переходим к системе $\begin{cases} b > 0, \\ x < 1 - b, \\ x > 3/b. \end{cases}$ (3)

Сравним выражения $(1 - b)$ и $3/b$ при $b > 0$: $1 - b - 3/b = (-b^2 + b - 3)/b = -(b^2 - b + 3)/b$. Разность отрицательна, следовательно, $1 - b < 3/b$. Поэтому системы (3) и (2) несовместны.

Ответ: 1) Если $b > 0$, то $x > (3 + b)/b$.
2) Если $b \leqslant 0$, то решений нет.

5.2. Примеры логарифмических неравенств с параметром

№ 1. Решите неравенство $\log_2 \dfrac{x-2}{a+1} < 3$.

Решение.

Данное неравенство равносильно в своей области определения системе неравенств

$$\begin{cases} (x-2)/(a+1) > 0, \\ (x-2)/(a+1) < 8. \end{cases}$$

Рассмотрим три случая.

1) $a = -1$: решений нет.

2) $a > -1$: $\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x - 2 < 8a + 8, \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ x < 10 + 8a. \end{cases}$

3) $a < -1$: $\begin{cases} x - 2 < 0, \\ x - 1 > 8a + 8, \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2, \\ x > 10 + 8a. \end{cases}$

Ответ: 1) Если $a > -1$, то $x \in (2; 10 + 8a)$.
2) Если $a < -1$, то $x \in (10 + 8a; 2)$.
3) Если $a = -1$, то решений нет.

№ 2. Решите неравенство $\log_{\frac{a+1}{a}} ax < 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} ax > 0, \\ a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty). \end{cases}$

Переходим к совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} ax > 0, \\ ax < 1, \\ a \in (0; +\infty), \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} ax > 1, \\ a \in (-\infty; -1). \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Решим систему (1): $\begin{cases} x > 0, \\ x < 1/a, \\ a \in (0; +\infty), \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 1/a, \\ a \in (0; +\infty). \end{cases}$

Решим систему (2): $\begin{cases} x < 1/a, \\ a \in (-\infty; -1). \end{cases}$

Ответ запишите по рис. 498.

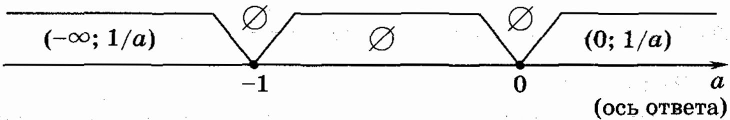


Рис. 498

№ 3. Решите неравенство

$2\log_4(x + 2b) + \log_{1/2}(x - b + 1) \geqslant 1.$

<u>Решение</u>.

Переходим к равносильному неравенству

$\log_2(x + 2b) - \log_2(x - b + 1) \geqslant 1.$

Решаем его: $\log_2(x + 2b) \geqslant \log_2 2(x - b + 1),$

$\begin{cases} x + 2b \geqslant 2x - 2b + 2, \\ x - b + 1 > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 4b - 2, \\ x > b - 1. \end{cases}$ Приравняем выражения $4b - 2$ и $b - 1$: $4b - 2 = b - 1$, $b = 1/3$.

1) Если $b > 1/3$, то $4b - 2 > b - 1$. Значит, $b - 1 < x \leqslant \leqslant 4b - 2$.

2) Если $b \leqslant 1/3$, то решений нет.

<u>Ответ</u>: 1) Если $b > 1/3$, то $x \in (b - 1; 4b - 2]$.
2) Если $b \leqslant 1/3$, то решений нет.

№ 4. Решите неравенство

$\log_{a+1}(x + 1) > \log_{a+1}(x + a).$

Решение.

Составляем совокупность двух систем, равносильную данному неравенству:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1>x+a,\\ x+a>0,\\ a+1>1;\end{cases}\\ \begin{cases}x+1<x+a,\\ x+1>0,\\ 0<a+1<1;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}0\cdot x>a-1,\\ x>-a,\\ a>0;\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}0\cdot x<a-1,\\ x>-1,\\ -1<a<0.\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Система (2) несовместна. Решаем систему (1).

1) Если $a \geqslant 1$, то решений нет.

2) Если $0 < a < 1$, то $x > -a$.

Ответ: 1) Если $a \in (0; 1)$, то $x \in (-a; +\infty)$.
2) Если $a \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$, то решений нет.

№ 5. Решите неравенство $\lg(ax^2) \leqslant \lg(2ax+5)$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}ax^2 \leqslant 2ax+5,\\ ax^2>0,\end{cases} \qquad \begin{cases}ax^2-2ax-5\leqslant 0,\\ a>0,\\ x\neq 0.\end{cases}$$

Найдем D_1 квадратного трехчлена $ax^2 - 2ax - 5$: $D_1 = a^2 + 5a$. Если $a > 0$, то $D_1 > 0$. Тогда

$x_1 = (a - \sqrt{a^2+5a})/a$; $x_2 = (a + \sqrt{a^2+5a})/a$ — корни квадратного трехчлена, причем $x_1 < 0$, $x_2 > 0$. Значит, число 0 находится между числами x_1 и x_2, а потому

$$x \in [(a-\sqrt{a^2+5a})/a; 0) \cup (0; (a+\sqrt{a^2+5a})/a]. \qquad (*)$$

Ответ запишите самостоятельно по рис. 499.

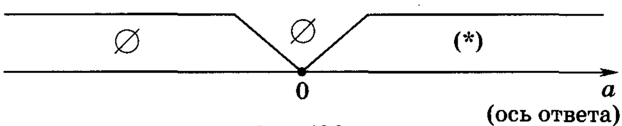


Рис. 499

№ 6. Решите неравенство

$$\log_{b+2}(x^2+b^2) \geqslant \log_{b+2}(2bx).$$

Решение.

Рассматриваем совокупность систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+b^2 \geqslant 2bx, \\ bx > 0, \\ b+2 > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+b^2 \leqslant 2bx, \\ x^2+b^2 > 0, \\ 0 < b+2 < 1; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} (x-b)^2 \geqslant 0, \\ b > -1, \\ bx > 0; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} (x-b)^2 \leqslant 0, \\ x^2+b^2 > 0, \\ -2 < b < -1. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Система (1) сводится к системе $\begin{cases} b > -1, \\ bx > 0. \end{cases}$

1) Если $b \in (-1; 0)$, то $x < 0$.

2) Если $b = 0$, то решений нет.

3) Если $b \in (0; +\infty)$, то $x > 0$.

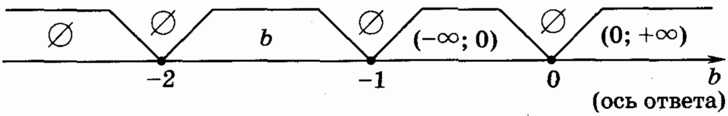


Рис. 500

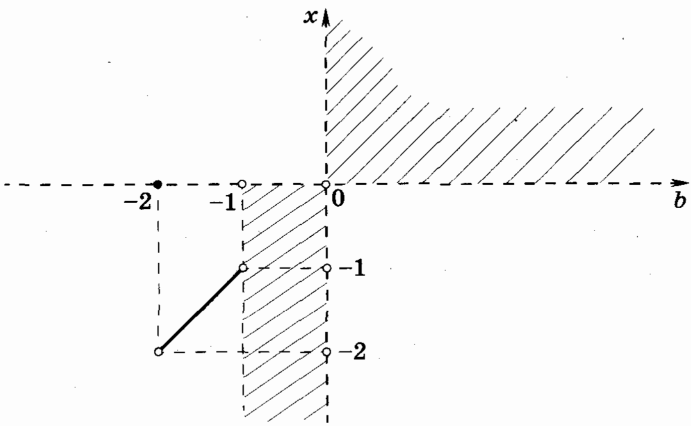


Рис. 501

Система (2) сводится к системе $\begin{cases} x = b, \\ -2 < b < -1. \end{cases}$

Ответ запишите самостоятельно по рис. 500.

Проиллюстрируем ответ в системе координат (bOx) (рис. 501).

№ 7. Решите неравенство $\log_a (x-1) + \log_a x > 2$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ x > 1. \end{cases}$

Перейдем к неравенству $\log_a (x^2 - x) > \log_a a^2$, а затем к совокупности систем

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} a > 1, \\ x > 1, \\ x^2 - x - a^2 > 0; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x^2 - x - a^2 < 0, \\ x > 1, \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

которая равносильна данному неравенству в ООН.

Рассмотрим систему (1).

$D = 1 + 4a^2$;

$$\begin{cases} a > 1, \\ \left[\begin{array}{l} x > (1 + \sqrt{1 + 4a^2})/2, \\ x < (1 - \sqrt{1 + 4a^2})/2, \end{array}\right. \\ x > 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 1, \\ x > (1 + \sqrt{1 + 4a^2})/2. \end{cases}$$

Решаем систему (2):

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ x > 1, \\ (1 - \sqrt{1 + 4a^2})/2 < x < (1 + \sqrt{1 + 4a^2})/2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 1 < x < (1 + \sqrt{1 + 4a^2})/2. \end{cases}$$

Заполним ось ответа (рис. 502).

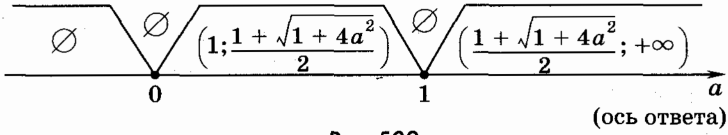


Рис. 502

<u>Ответ</u>: 1) Если $a > 1$, то $x \in ((1 + \sqrt{1 + 4a^2})/2; +\infty)$.
2) Если $a \in (0; 1)$,
то $x \in (1; (1 + \sqrt{1 + 4a^2})/2)$.
3) Если $a \leqslant 0$ или $a = 1$, то решений нет.

№ 8. Решите неравенство $\log_{1/2}(x^2 - 2x + a) > -3$.

<u>Решение</u>.
Переходим к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x + a > 0, \\ x^2 - 2x + a < 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x + a > 0, & (1) \\ x^2 - 2x + a - 8 < 0. & (2) \end{cases}$$

Решаем неравенство второй степени (1):

$D_1 = 1 - a$. 1) $a > 1$: $x \in \mathrm{R}$.

2) $a = 1$: $(x - 1)^2 > 0$, $x \neq 1$.

3) $a < 1$: $x \in (-\infty; 1 - \sqrt{1 - a}) \cup (1 + \sqrt{1 - a}; +\infty)$.

Множества решений неравенства (1) отмечены на оси (1) рис. 503.

Рассмотрим теперь неравенство (2):

$D_1 = 9 - a$. 1) $a > 9$: решений нет.

2) $a = 9$:

$(x - 1)^2 < 0$. Решений нет.

3) $a < 9$:

$x \in (1 - \sqrt{9 - a}; 1 + \sqrt{9 - a})$.

Заполним ось (2) на рис. 503.

Заполнив оси (1) и (2), нужно найти пересечение соответствующих множеств, записав их на оси ответа (рис. 503).

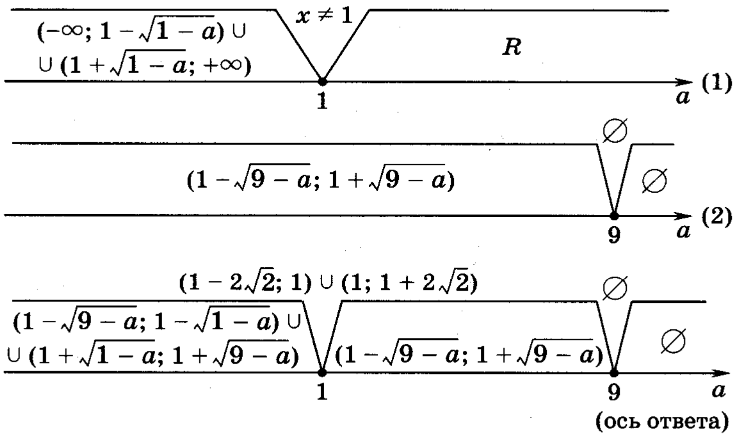


Рис. 503

Ответ: 1) Если $a \leqslant 1$, то $x \in (1-\sqrt{9-a};$
$1-\sqrt{1-a}) \cup (1+\sqrt{1-a}; 1+\sqrt{9-a})$.
2) Если $1 < a < 9$,
то $x \in (1-\sqrt{9-a}; 1+\sqrt{9-a})$.
3) Если $a \geqslant 9$, то решений нет.

Решим данное неравенство графически в системе координат (xOy).

Систему неравенств $\begin{cases} x^2-2x+a>0, \\ x^2-2x+a-8<0 \end{cases}$ перепишем в виде $\begin{cases} x^2-2x>-a, \\ x^2-2x<8-a \end{cases}$ или $-a<x^2-2x<8-a$.

Введем три функции: $y_1 = x^2-2x$, $y_2=-a$, $y_3 = 8-a$. Строим их графики (рис. 504).

При одном и том же значении a параллельные прямые $y_2=-a$ и $y_3=8-a$ задают полосу шириной 8.

1) Если $8-a \leqslant -1$, т. е. $a \geqslant 9$, то в эту полосу не попадет ни одна точка графика $y_1 = x^2-2x$. Поэтому в этом случае решений нет.

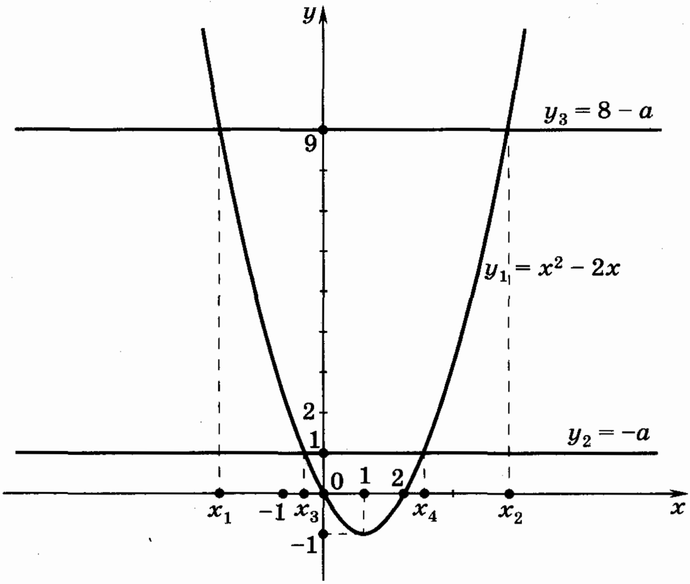


Рис. 504

2) Если $\begin{cases} 8 - a > -1, \\ -a < -1, \end{cases}$ т. е. $1 < a < 9$, то $x \in (x_1; x_2)$, где x_1 и x_2 — абсциссы точек пересечения графиков функций y_1 и y_3 ($x_1 = 1 - \sqrt{9 - a}$; $x_2 = 1 + \sqrt{9 - a}$).

3) Пусть теперь $-a \geqslant -1$, т. е. $a \leqslant 1$. Тогда

$x \in (x_1; x_3) \cup (x_4; x_2)$,

где x_3 и x_4 — абсциссы точек пересечения графиков функций y_1 и y_2 ($x_3 = 1 - \sqrt{1 - a}$; $x_4 = 1 + \sqrt{1 - a}$).

№ 8. Найдите все такие значения параметра a, при которых для любого $x < 0$ выполняется неравенство $\log_2 (x^2 + ax + 1) > -1$.

Решение.

Решим это неравенство двумя способами: аналитическим и графическим.

<u>1 способ</u>. Переходим от данного неравенства к неравенству $x^2 + ax + 1 > 1/2$, равносильному данному в его области определения. Найдем такие значения a, при которых неравенство $2x^2 + 2ax + 1 > 0$ справедливо при любом значении $x < 0$.

Рассматриваем три случая в зависимости от значений $D_1 = a^2 - 2$.

1) $D_1 < 0$, т. е. $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$. В этом случае $x \in R$, а значит, неравенство выполняется при любом $x < 0$.

2) $D_1 = 0$:

а) $a = -\sqrt{2}$: $\begin{cases} (x - \sqrt{2})^2 > 0, \\ x < 0. \end{cases}$

Система совместна при любом $x < 0$.

б) $a = \sqrt{2}$: неравенство $(x + \sqrt{2})^2 > 0$ верно при всех $x \neq -\sqrt{2}$, но $-\sqrt{2} < 0$. Значит, $a = \sqrt{2}$ не подходит.

3) $D_1 > 0$, т. е. $a \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Тогда $x \in (-\infty; -a - \sqrt{a^2 - 2}) \cup (-a + \sqrt{a^2 - 2}; +\infty)$ (рис. 505).

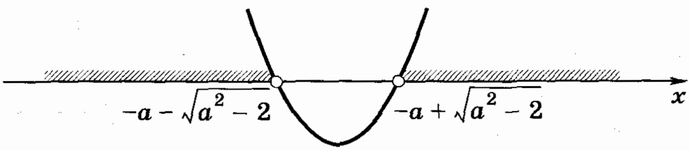


Рис. 505

Если $a \in (-\infty; -\sqrt{2})$, то $-a - \sqrt{a^2 - 2} > 0$, а значит, данное неравенство выполняется при любом $x < 0$.

Если же $a \in (\sqrt{2}; +\infty)$, то все числа интервала $(-a - \sqrt{a^2 - 2}; -a + \sqrt{a^2 - 2})$ являются отрицательными, но не являются решениями данного неравенства.

<u>Ответ</u>: $a < \sqrt{2}$.

<u>2 способ</u>. Пусть $f(x) = 2x^2 + 2ax + 1$.

1) $D_1 < 0$, т. е. $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$. Покажем схематично расположение параболы в этом случае (рис. 506). $f(x) > 0$ при любом значении $x < 0$.

2) $D_1 = 0$:

а) $a = -\sqrt{2}$ (рис. 507).

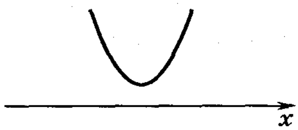


Рис. 506

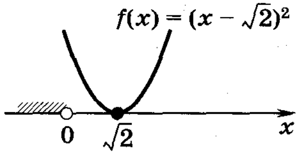


Рис. 507

Видим, что неравенство $(x - \sqrt{2})^2 > 0$ верно при любом значении $x < 0$.

б) $a = \sqrt{2}$ (рис. 508).

При $x = -\sqrt{2}$ неравенство $(x + \sqrt{2})^2 > 0$ неверно.

3) $D_1 > 0$: $\left[\begin{array}{l} a > \sqrt{2}, \\ a < -\sqrt{2} \end{array}\right.$ (рис. 509).

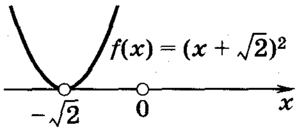


Рис. 508

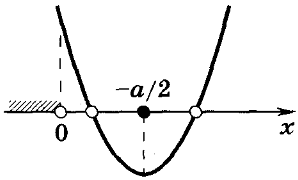


Рис. 509

Используя теоремы о расположении корней квадратного трехчлена, составим и решим систему неравенств:

$$\begin{cases} -a/2 > 0, \\ D_1 > 0, \\ f(0) \geqslant 0: \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0, \\ \left[\begin{array}{l} a > \sqrt{2}, \\ a < -\sqrt{2}, \end{array}\right. \\ 1 \geqslant 0, \end{cases} \quad a < -\sqrt{2}.$$

Итак, при $a < \sqrt{2}$ данное неравенство выполняется при любом $x < 0$.

№ 10. Найдите все $a \in R$, при каждом из которых область определения функции

$f(x) = \lg((a+1)x^2 - ax - 1)$

не пересекается с множеством $[1; 2]$.

Решение.

Для нахождения области определения данной функции решим неравенство $(a+1)x^2 - ax - 1 > 0$. Рассмотрим ряд случаев.

1) $a = -1$: $x - 1 > 0$, $x > 1$. Множества $[1; 2]$ и $(1; +\infty)$ пересекаются. Значит, число $a = -1$ не подходит.

2) $a \neq -1$: $D = (a+2)^2$.

а) $D = 0$, т. е. $a = -2$: $(x-1)^2 < 0$. Полученное неравенство решений не имеет. Поэтому при $a = -2$ областью определения данной функции является пустое множество, которое с множеством $[1; 2]$ не пересекается.

б) $a \neq -2$: $x_1 = 1$; $x_2 = -1/(a+1)$ — корни квадратного трехчлена $(a+1)x^2 - ax - 1$.

Пусть $a > -1$ (рис. 510).

Тогда область определения

$D(f) = \left(-\infty; -\dfrac{1}{a+1}\right) \cup (1; +\infty)$. Найденное множество решений пересекается с множеством $[1; 2]$.

Пусть теперь $a < -1$, $a \neq -2$ (рис. 511).

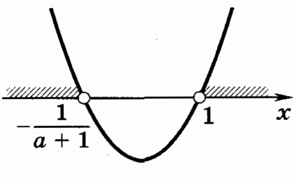


Рис. 510

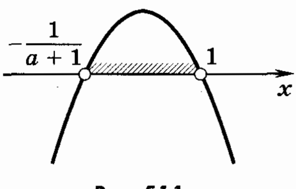


Рис. 511

Область определения $D(f) = \left(-\frac{1}{a+1}; 1\right)$. Легко видеть, что $D(f)$ и множество $[1; 2]$ не пересекаются. Итак, если $a < -1$, то область определения данной функции и множество $[1; 2]$ не пересекаются.

Ответ: $a < -1$.

№ 11. Решите неравенство

$\log_a (x^2 + 4x - 1) < \log_{2a} (x^2 + 4x - 1)$.

Решение.

$$\text{ООН: } \begin{cases} a > 0,\ a \neq 1/2,\ a \neq 1, \\ x \in (-\infty; -2 - \sqrt{5}) \cup (-2 + \sqrt{5}; +\infty). \end{cases}$$

Перейдем в правой части неравенства к логарифму при основании a:

$$\log_a (x^2 + 4x - 1) < \frac{\log_a (x^2 + 4x - 1)}{\log_a (2a)}.$$

1) Пусть $\log_a (2a) > 0$, тогда $\log_a (2a) > \log_a 1$,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ 2a > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 2a < 1, \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a > 1 \\ 0 < a < 1/2. \end{array}\right.$$

Освободившись от знаменателя, получим неравенство $\log_a (x^2 + 4x - 1) \cdot (\log_a (2a) - 1) < 0$.

а) Если $a > 1$, то $\log_a (2a) > 1$, а поэтому

$\log_a (x^2 + 4x - 1) < 0$:

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 1 < 1, \\ x^2 + 4x - 1 > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 4x - 2 < 0, \\ x^2 + 4x - 1 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 - \sqrt{6} < x < -2 + \sqrt{6}, \\ \left[\begin{array}{l} x > -2 + \sqrt{5}, \\ x < -2 - \sqrt{5}; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} -2 - \sqrt{6} < x < -2 - \sqrt{5}, \\ -2 + \sqrt{5} < x < -2 + \sqrt{6}. \end{array}\right. \qquad (*)$$

б) Если $0 < a < 1/2$, то $\log_a(2a) < 1$, а потому

$$\log_a(x^2+4x-1) > 0: \begin{cases} x^2+4x-1 > 0, \\ x^2+4x-2 < 0. \end{cases}$$

И в этом случае то же множество решений, что и при $a > 1$.

2) Пусть $\log_a(2a) < 0$: $\log_a(2a) < \log_a 1$,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ 2a < 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 2a > 1, \end{cases} \end{array}\right. \quad 1/2 < a < 1.$$

Переходим к неравенству

$$\log_a(x^2+4x-1)\cdot(\log_a(2a)-1) > 0.$$

Заметим, что $\log_a(2a) - 1 < 0$ при $1/2 < a < 1$. Значит, $\log_a(x^2+4x-1) < 0$, а потому $x^2+4x-1 > 0$:

$$\left[\begin{array}{l} x > -2+\sqrt{5}, \\ x < -2-\sqrt{5}. \end{array}\right. \qquad (**)$$

Ответ запишите самостоятельно по рис. 512.

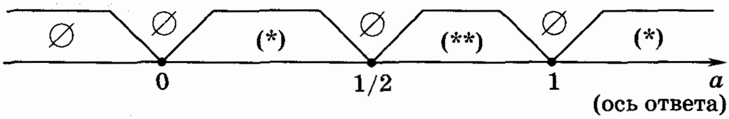


Рис. 512

№ 12. Решите неравенство $\log_2(\sqrt{x^2-2ax+1}-1) \leqslant 1$.

Решение.

Данное неравенство в своей области определения равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2ax+1} > 1, \\ \sqrt{x^2-2ax+1} - 1 \leqslant 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-2ax > 0, & (1) \\ x^2-2ax-8 \leqslant 0. & (2) \end{cases}$$

Решим неравенство (1): $x(x-2a) > 0$.

1) Если $a = 0$, то $x \neq 0$.

2) Если $a > 0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (2a; +\infty)$.

3) Если $a < 0$, то $x \in (-\infty; 2a) \cup (0; +\infty)$.

Заносим результаты на ось (1) рис. 513.

Рассмотрим неравенство (2): $D_1 = a^2 + 8$. Учитывая, что $D_1 > 0$ при любом $a \in R$, получим, что

$a - \sqrt{a^2+8} \leqslant x \leqslant a + \sqrt{a^2+8}$ (рис. 513, ось (2)).

Заполним ось ответа, найдя пересечения соответствующих множеств значений x (рис. 513).

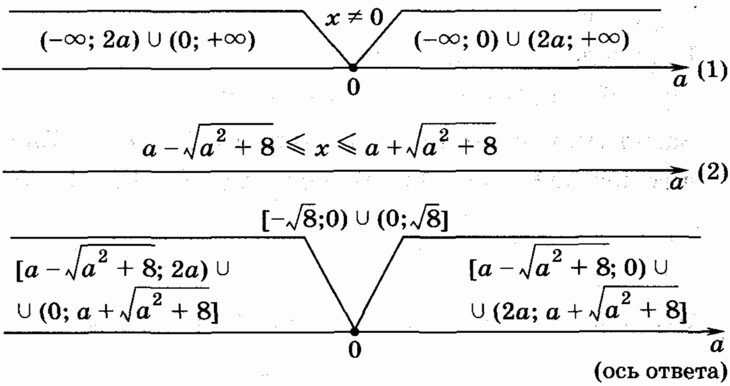


Рис. 513

<u>Ответ</u>: 1) Если $a < 0$, то $x \in [a - \sqrt{a^2+8}; 2a) \cup$
$\cup (0; a + \sqrt{a^2+8}]$.

2) Если $a \geqslant 0$, то $x \in [a - \sqrt{a^2+8}; 0) \cup$
$\cup (2a; a + \sqrt{a^2+8}]$.

№ 13. Решите неравенство $\log_a \sqrt{3{,}5x - 1{,}5} \cdot \log_x a < 1$.

<u>Решение</u>.

$$\text{ООН: } \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ x > 3/7, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Перейдем от данного неравенства к равносильному ему неравенству $\dfrac{\log_a\sqrt{3{,}5x-1{,}5}}{\log_a x}<1$, а затем к неравенству $\dfrac{\log_a\sqrt{3{,}5x-1{,}5}-\log_a x}{\log_a x}<0$. Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_a\sqrt{3{,}5x-1{,}5}-\log_a x>0,\\ \log_a x<0,\\ x>3/7,\ x\neq 1;\end{cases} \qquad (1)\\ \begin{cases}\log_a\sqrt{3{,}5x-1{,}5}-\log_a x<0,\\ \log_a x>0,\\ x>3/7,\ x\neq 1.\end{cases} \qquad (2)\end{array}\right.$$

Решаем систему (1):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ \sqrt{3{,}5x-1{,}5}>x,\\ 3/7<x<1;\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ \sqrt{3{,}5x-1{,}5}<x,\\ x>1;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ 2x^2-7x+3<0,\\ 3/7<x<1;\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ 2x^2-7x+3>0,\\ x>1;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ 1/2<x<3,\\ 3/7<x<1;\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ \left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<1/2,\end{array}\right.\\ x>1;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ 1/2<x<1;\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ x>3\end{cases}\end{array}\right. \qquad \text{(ось (1) рис. 514).}$$

Решим теперь систему (2):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ \sqrt{3{,}5x-1{,}5}<x,\\ x>1;\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ \sqrt{3{,}5x-1{,}5}>x,\\ 3/7<x<1;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ 2x^2-7x+3>0,\\ x>1;\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ x^2-7x+3<0,\\ 3/7<x<1;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a > 1, \\ x > 3; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 1/2 < x < 1 \end{cases}\end{array}\right. \quad \text{(ось (2) рис. 514).}$$

Объединив соответствующие множества значений x, получим ответ (рис. 514, ось ответа).

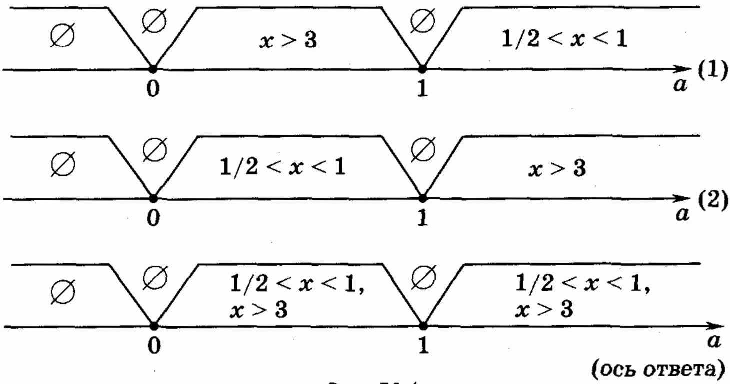


Рис. 514

Ответ: 1) Если $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x \in (1/2; 1) \cup (3; +\infty)$.
2) Если $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$, то решений нет.

№ 14. Решите неравенство

$$\log_3 \sqrt{x^2 - 2ax - 1} > \log_3 (ax).$$

Решение.

Данное неравенство в области его определения равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2ax - 1} > ax, \\ ax > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} ax > 0, \\ x^2 - 2ax - 1 > a^2x^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax > 0, & (1) \\ (1 - a^2)x^2 - 2ax - 1 > 0. & (2) \end{cases}$$

(1): $ax > 0$:

$a = 0$: решений нет;

$a > 0$: $x > 0$;

$a < 0$: $x < 0$ (ось (1) рис. 515).

(2): $(1 - a^2)x^2 - 2ax - 1 > 0$.

$a = 1$: $-2x - 1 > 0$, $x < -1/2$.

$a = -1$: $2x - 1 > 0$, $x > 1/2$.

$a \neq \pm 1$. Найдем корни квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства (2).

$D_1 = 1$; $x_1 = -1/(a + 1)$; $x_2 = 1/(1 - a)$.

Рассмотрим возможные случаи:

а) $|a| > 1$: $1/(1 - a) < x < -1/(a + 1)$. (*)

б) $|a| < 1$: $\left[\begin{array}{l} x > 1/(1 - a), \\ x < -1/(a + 1). \end{array}\right.$ (**)

Заполним ось (2) (рис. 515) и ось ответа.

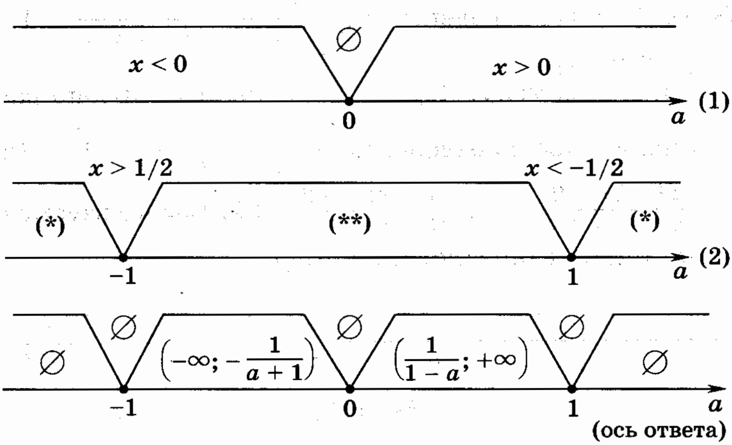


Рис. 515

<u>Ответ</u>: 1) Если $-1 < a < 0$, то $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{a+1}\right)$.

2) Если $0 < a < 1$, то $x \in \left(\frac{1}{1-a}; +\infty\right)$.

3) В остальных случаях решений нет.

№ 15. Решите неравенство $\dfrac{3\log_a x+6}{\log_a^2 x+2}>1.$

Решение.

ООН: $\begin{cases} a>0,\ a\neq 1,\\ x>0.\end{cases}$

Пусть $\log_a x = t$. Тогда получим неравенство $\dfrac{3t+6}{t^2+2}>1$; $t^2-3t-4<0$, $-1<t<4$. И далее:

$$\begin{cases}\log_a x<4,\\ \log_a x>-1;\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ 1/a<x<a^4;\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ a^4<x<1/a.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: 1) Если $a>1$, то $1/a<x<a^4$.
2) Если $0<a<1$, то $a^4<x<1/a$.
3) Если $a\leqslant 0$ или $a=1$, то решений нет.

№ 16. Решите неравенство $\dfrac{1}{5-\log_a x}+\dfrac{2}{1+\log_a x}<1.$

Решение.

Введем замену: $\log_a x = t$. Решим дробно-рациональное неравенство $\dfrac{1}{5-t}+\dfrac{2}{1+t}-1<0$: $\dfrac{t^2-5t+6}{(5-t)(1+t)}<0$, $\dfrac{(t-2)(t-3)}{(5-t)(1+t)}<0$. Воспользуемся методом интервалов (рис. 516).

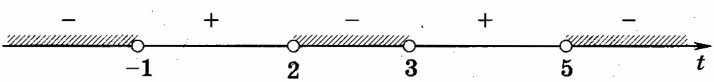


Рис. 516

$$\left[\begin{array}{l} t>5,\\ 2<t<3,\\ t<-1;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l} \log_a x>5,\\ 2<\log_a x<3,\\ \log_a x<-1;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ \left[\begin{array}{l}x>a^5,\\ a^2<x<a^3,\\ 0<x<1/a;\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ \left[\begin{array}{l}0<x<a^5,\\ a^3<x<a^2,\\ x>1/a.\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: 1) Если $a > 1$, то

$x \in \left(0; \dfrac{1}{a}\right) \cup (a^2; a^3) \cup (a^5; +\infty)$.

2) Если $0 < a < 1$, то

$x \in (0; a^5) \cup (a^3; a^2) \cup \left(\dfrac{1}{a}; +\infty\right)$.

3) Если $a \leqslant 0$ или $a = 1$, то решений нет.

№ 17. Решите неравенство

$3\lg^2(bx-1) - 10\lg(bx-1) + 3 \geqslant 0$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} b \in \mathrm{R}, \\ bx - 1 > 0. \end{cases}$

Пусть $\lg(bx-1) = t$: $3t^2 - 10t + 3 \geqslant 0$,

$(t - 1/3)(t - 3) \geqslant 0$,

$\left[\begin{array}{l} t \geqslant 3, \\ t \leqslant 1/3, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ll} \lg(bx-1) \geqslant 3, & (2) \\ \lg(bx-1) \leqslant 1/3. & (1) \end{array}\right.$

Неравенство (1) равносильно системе

$\begin{cases} bx - 1 > 0, \\ bx - 1 \leqslant \sqrt[3]{10}. \end{cases}$

1) $b = 0$: решений нет.

2) $b > 0$: $\begin{cases} x > 1/b, \\ x \leqslant (1 + \sqrt[3]{10})/b, \end{cases}$ $1/b < x \leqslant (1 + \sqrt[3]{10})/b$. (*)

3) $b < 0$: $\begin{cases} x \geqslant (\sqrt[3]{10} + 1)/b, \\ x < 1/b, \end{cases}$ $(1 + \sqrt[3]{10})/b \leqslant x < 1/b$. (**)

(Ось (1) рис. 517.)

Неравенство $\lg(bx-1) \geqslant 3$ (2) равносильно неравенству $bx - 1 \geqslant 1000$: $bx \geqslant 1001$.

1) $b = 0$: решений нет.

2) $b > 0$: $x \geqslant 1001/b$. (Δ)

3) $b < 0$: $x \leqslant 1001/b$. (ΔΔ)

Заполняем ось (2) рис. 517 и объединим результаты на оси ответа.

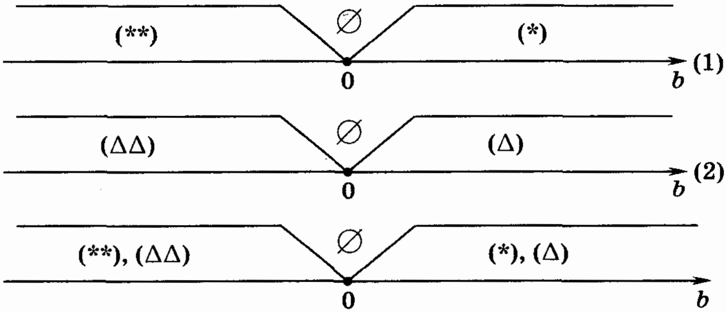


Рис. 517

<u>Ответ</u>: 1) Если $b > 0$, то $x \in (1/b; (1+\sqrt[3]{10})/b] \cup$
$\cup\, [1001/b; +\infty)$.
2) Если $b < 0$, то $x \in (-\infty; 1001/b] \cup$
$\cup\, [(1+\sqrt[3]{10})/b; 1/b)$.
3) Если $b = 0$, то решений нет.

№ 18. Решите неравенство $\log_{ax} a > 0$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} a > 0, \\ x > 0, \\ x \ne 1/a. \end{cases}$

Рассмотрим равносильную данному неравенству совокупность систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ax > 1, \\ a > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < ax < 1, \\ 0 < a < 1; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ x > 1/a; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < x < 1/a. \end{cases} \end{array}\right.$$

<u>Ответ</u>: 1) Если $a > 1$, то $x > 1/a$.
2) Если $0 < a < 1$, то $0 < x < 1/a$.
3) Если $a \leqslant 0$ или $a = 1$, то решений нет.

№ 19. Решите неравенство $\log_{ax}(x+5) \geqslant 0$.

<u>Решение</u>.

ООН: $\begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x > -5, \\ ax > 0, \\ ax \neq 1. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ax > 1, \\ x+5 \geqslant 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < ax < 1, \\ 0 < x+5 \leqslant 1; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} ax > 1, \\ x \geqslant -4; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} 0 < ax < 1, \\ -5 < x \leqslant -4. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решим систему (1):

1) $a = 0$: решений нет.

2) $a > 0$: $\begin{cases} x > 1/a, \\ x \geqslant -4, \end{cases}$ $x > 1/a$.

3) $a < 0$: $\begin{cases} x < 1/a, \\ x \geqslant -4. \end{cases}$

Приравняем $1/a$ и -4: $1/a = -4$; $a = -1/4$ (рис. 518).
Рассмотрим каждый промежуток.
Если $-1/4 \leqslant a < 0$, то решений нет.
Если $a < -1/4$, то $-4 \leqslant x < 1/a$ (ось (1) рис. 520).

Решаем теперь систему (2): $\begin{cases} 0 < ax < 1, \\ -5 < x \leqslant -4. \end{cases}$

1) $a = 0$: решений нет.

2) $a > 0$: $\begin{cases} 0 < x < 1/a, \\ -5 < x \leqslant -4. \end{cases}$ Система несовместна.

3) $a < 0$: $\begin{cases} 1/a < x < 0, \\ -5 < x \leqslant -4. \end{cases}$

$1/a = -5$: $a = -1/5$.

Рассмотрим ряд случаев (рис. 519).
1) $-1/5 \leqslant a < 0$: $-5 < x \leqslant -4$.
2) $a \leqslant -1/4$: решений нет.
3) $-1/4 < a < -1/5$: $1/a < x \leqslant -4$ (ось (2) рис. 520).

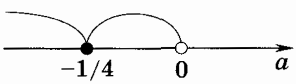


Рис. 518

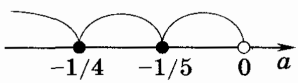


Рис. 519

Объединив полученные множества решений систем, получим ответ (рис. 520, ось ответа).

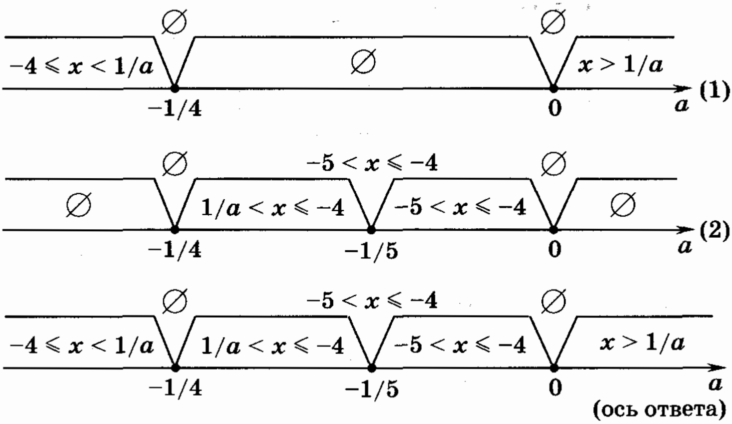


Рис. 520

Ответ: 1) Если $a < -1/4$, то $x \in [-4; 1/a)$.
2) Если $-1/4 < a < -1/5$, то $x \in (1/a; -4]$.
3) Если $-1/5 \leqslant a < 0$, то $x \in (-5; -4]$.
4) Если $a > 0$, то $x \in (1/a; +\infty)$.
5) Если $a = -1/4$ или $a = 0$, то решений нет.

№ 20. Решите неравенство $\log_{x+2}(x^2 - 2x + p) \geqslant 2$.

Решение.

Рассмотрим совокупность двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x + 2 > 1, \\ x^2 - 2x + p \geqslant (x+2)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x + 2 < 1, \\ 0 < x^2 - 2x + p \leqslant (x+2)^2; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases} x > -1, \\ x \leqslant (p-4)/6; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} -2 < x < -1, \\ x^2 - 2x + p > 0, \\ x \geqslant (p-4)/6. \end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Решим систему (1): $\begin{cases} x > -1, \\ x \leqslant (p-4)/6. \end{cases}$

$(p-4)/6 = -1, \quad p = -2.$

а) $p \leqslant -2$: решений нет.

б) $p > -2$: $\; -1 < x \leqslant (p-4)/6$ (ось (1) рис. 524).

Теперь решаем систему (2): $\begin{cases} -2 < x < -1, \\ x \geqslant (p-4)6, \\ x^2 - 2x + p > 0. \end{cases}$

$(p-4)/6 = -2, \quad p = -8.$

Рассмотрим ряд случаев (рис. 521).

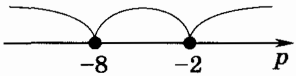


Рис. 521

а) $p \geqslant -2$. Система (2) несовместна.

б) $-8 < p < -2$: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1 + \sqrt{1-p}, \\ x < 1 - \sqrt{1-p}, \end{array}\right. \\ (p-4)/6 \leqslant x < -1; \end{cases}$

$\begin{cases} x < 1 - \sqrt{1-p}, \\ (p-4)/6 \leqslant x < -1 \end{cases}$ (верхняя ось рис. 522).

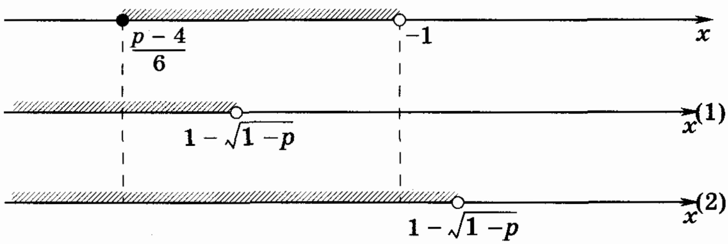


Рис. 522

Сравним сначала выражения $1 - \sqrt{1-p}$ и $(p-4)/6$; $1 - \sqrt{1-p}$ и -1.

Докажем, что $1-\sqrt{1-p} > (p-4)/6$ при $p \in (-8; -2)$.
$6 - 6\sqrt{1-p} > p - 4$; $6\sqrt{1-p} < 10 - p$;
$36 - 36p < (10-p)^2$, $p^2 + 16p + 64 > 0$, $(p+8)^2 > 0$.
Приравняем теперь $1-\sqrt{1-p}$ и -1:
$1-\sqrt{1-p} = -1$, $\sqrt{1-p} = 2$, $p = -3$.

1) Если $-8 < p \leqslant -3$, то $\dfrac{p-4}{6} \leqslant x < 1-\sqrt{1-p}$ (ось (1) рис. 522).

2) Если $-3 < p < -2$, то $\dfrac{p-4}{6} \leqslant x < -1$ (ось (2) рис. 522).

в) $p = -8$: решений нет.
г) $p < -8$:

$$\begin{cases} -2 < x < -1, \\ \left[\begin{array}{l} x > 1+\sqrt{1-p}, \\ x < 1-\sqrt{1-p} \end{array}\right. \end{cases}$$

(рис. 523).

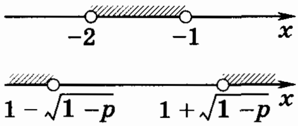


Рис. 523

Эта система при $p < -8$ несовместна.
Заполняем ось (2) рис. 524 и объединяем множества решений (ось ответа рис. 524).

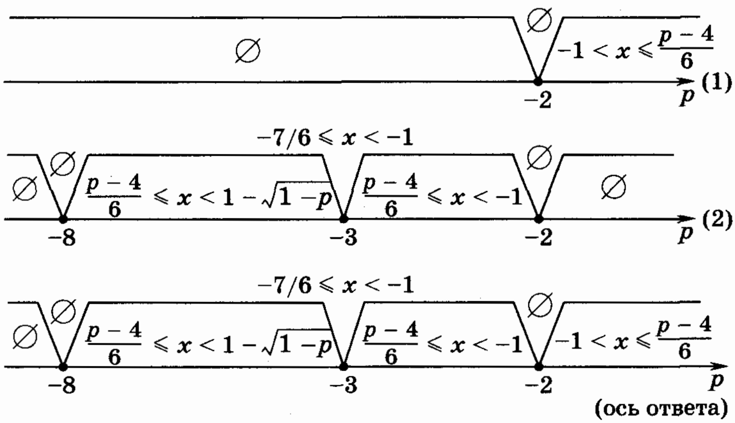


Рис. 524

Ответ: 1) Если $-8 < p \leqslant -3$,

то $x \in [(p-4)/6;\ 1 - \sqrt{1-p})$.

2) Если $-3 < p < -2$, то $x \in [(p-4)/6;\ -1)$.

3) Если $p > -2$, то $x \in (-1;\ (p-4)/6]$.

4) Если $p \leqslant -8$ или $p = -2$, то решений нет.

№ 21. При каких значениях a неравенство

$$\log_{2x}(3x + a) < 1$$

не имеет решений?

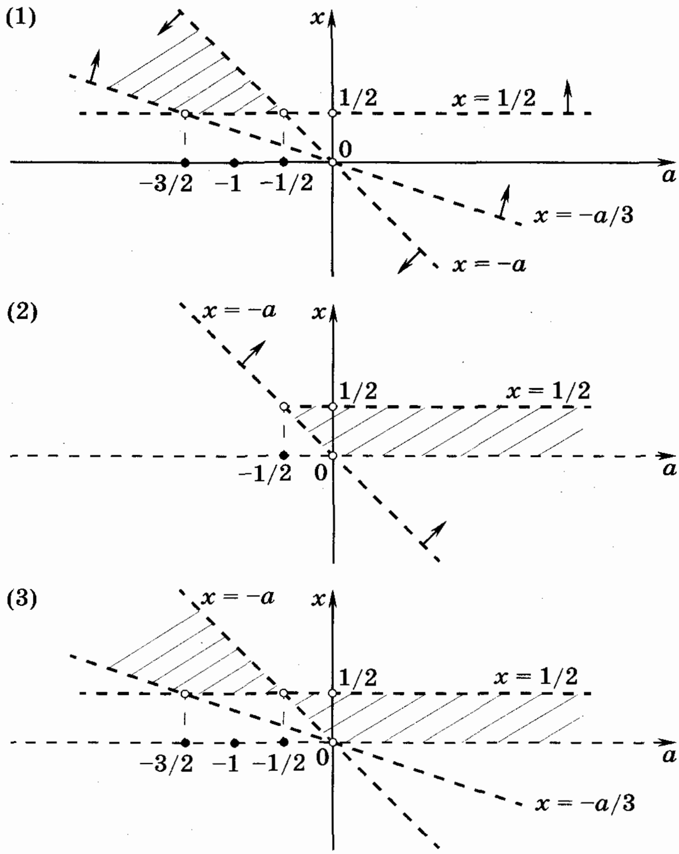


Рис. 525

Решение.

В области определения данное неравенство равносильно совокупности систем $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x>1,\\0<3x+a<2x;\end{cases}\\\begin{cases}0<2x<1,\\3x+a>2x;\end{cases}\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x>1/2,\\x>-a/3,\\x<-a;\end{cases} & (1)\\\begin{cases}0<x<1/2,\\x>-a.\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Решим эту совокупность графически в системе координат (aOx), причем воспользуемся тремя системами координат (рис. 525).

Из рисунка видно, что система (1) не имеет решений при $a \geqslant -1/2$, система (2) — при $a \leqslant -1/2$, а потому совокупность этих систем не имеет решений при $a = -1/2$.

Ответ: $a = -1/2$.

№ 22. Найдите значения a, при которых неравенство $\log_{a+x} x(a-x) < \log_{a+x} x$ имеет хотя бы одно решение.

Решение.

ООН: $\begin{cases}a+x\neq 1,\\a>0,\\0<x<a.\end{cases}$

Рассматриваем совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<a,\\a>0,\\a+x>1,\\x(a-x)<x;\end{cases}\\\begin{cases}0<x<a,\\a>0,\\0<a+x<1,\\x(a-x)>x:\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<a,\\a>0,\\x>1-a,\\a-x<1;\end{cases}\\\begin{cases}0<x<a,\\a>0,\\-a<x<1-a,\\a-x>1;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}0<x<a,\\x>1-a,\\x>a-1;\\a>0;\end{cases} & (1)\\\begin{cases}0<x<a-1,\\a>0,\\0<x<1-a.\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

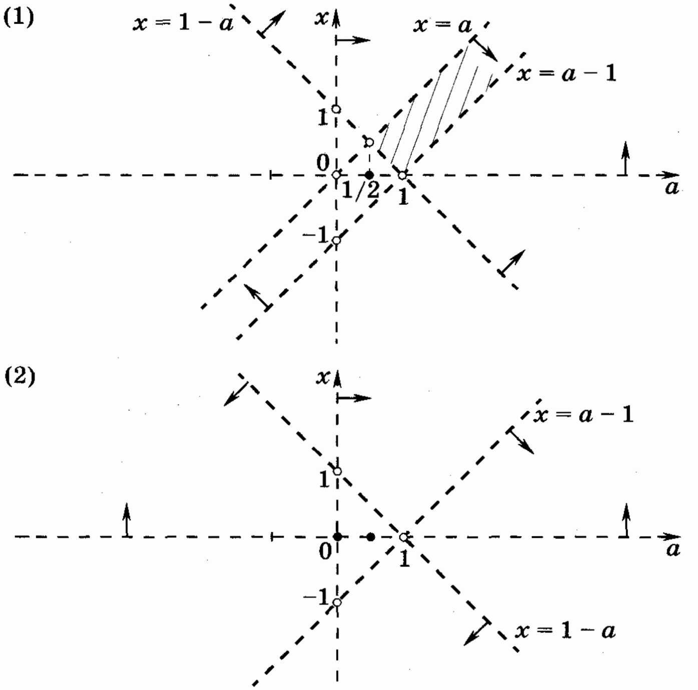


Рис. 526

Полученные системы решаем графически (рис. 526).

Найдем абсциссу точки пересечения прямых $x = 1 - a$ и $x = a$: $a = 1/2$. Если $a > 1/2$, то система (1) имеет решения. Система (2) решений не имеет ни при каком значении a. Поэтому совокупность этих систем имеет хотя бы одно решение при $a > 1/2$.

Ответ: $a > 1/2$.

№ 23. Решите неравенство $\log_x (x - a) > 2$.

Решение.

$$\text{ООН: } \begin{cases} a \in \mathrm{R}, \\ x > 0 \\ x \neq 1, \\ x > a. \end{cases}$$

Рассматриваем совокупность двух систем

$$\begin{cases} x > 1, \\ x - a > x^2; \end{cases} \quad (1) \text{ и } \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x - a < x^2, \\ x > a. \end{cases} \quad (2)$$

Решаем систему (1): $\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - x + a < 0. \end{cases}$ Покажем схематично, как должны располагаться параболы, заданные уравнением $f(x) = x^2 - x + a$, чтобы неравенство $x^2 - x + a < 0$ имело решения (рис. 527).

$D = 1 - 4a$; $1 - 4a > 0$,

$a < 1/4$.

$x = 1$ может располагаться:

1) между $1/2$ и x_2 (случай (1) на рис. 527);

2) правее или совпадать с x_2 (случай (2) на рис. 527).

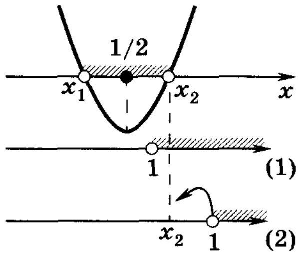


Рис. 527

Случай (1):

$1 < (1 + \sqrt{1 - 4a})/2$: $a < 0$.

В этом случае

$x \in (1; (1 + \sqrt{1 - 4a})/2)$.

Случай (2): $1 \geqslant (1 + \sqrt{1 - 4a})/2$: $a \geqslant 0$. Решений нет. Отметим результаты на рис. 531 (ось (1)).

Решаем систему (2): $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 - x + a > 0, \\ x > a. \end{cases}$

Рассмотрим квадратный трехчлен, дискриминант которого $D = 1 - 4a$.

Возможные случаи:

1) $D < 0$ (рис. 528), тогда можно составить систему:

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ a > 1/4, \\ x > a; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1/4 < a < 1, \\ a < x < 1; \end{cases} \\ \begin{cases} a \geqslant 1, \\ 0 < x < 1, \\ x > a; \end{cases} \end{array} \right. \qquad \begin{cases} 1/4 < a < 1, \\ a < x < 1. \end{cases}$$

Если $a \geqslant 1$, то система (2) решений не имеет.

2) D = 0 (рис. 529), т. е. $a = 1/4$: $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ (x - 1/2)^2 > 0, \\ x > 1/4. \end{cases}$

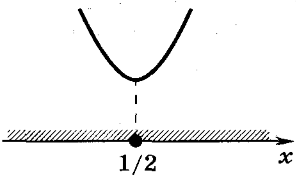


Рис. 528

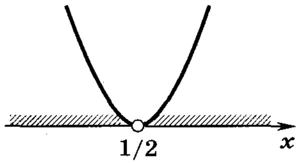


Рис. 529

Тогда $x \in (1/4; 1/2) \cup (1/2; 1)$.

3) D > 0 (рис. 530), т. е. $a < 1/4$.

Случай (1): $a \leqslant 0$. Решений система (2) не имеет. Случай (2): $0 < a < 1/4$, корни квадратного трехчлена $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$.

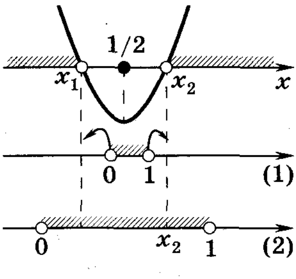


Рис. 530

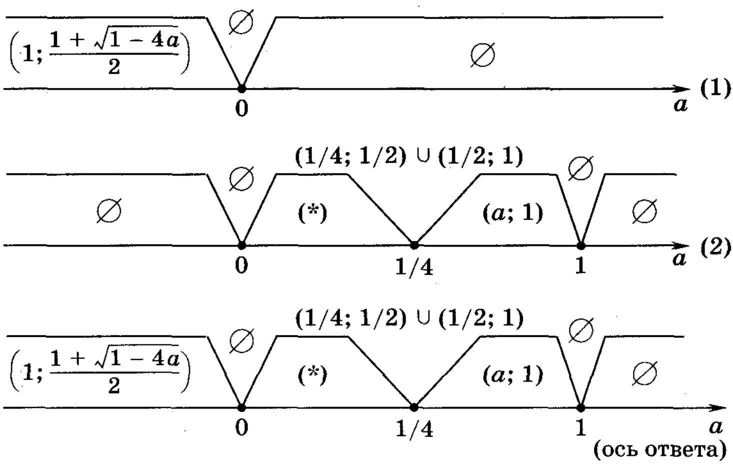


Рис. 531

Тогда $x \in \left(a;\ \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2};\ 1\right)$ (*)

(ось (2) рис. 531).

Объединив соответствующие множества решений систем совокупности, получим ответ (рис. 531, ось ответа).

Ответ: 1) Если $a \in (-\infty; 0)$,

то $x \in \left(1;\ \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$.

2) Если $a = 0$ или $a \in [1; +\infty)$, то решений нет.

3) Если $a \in (0; 1/4]$,

то $x \in \left(a;\ \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2};\ 1\right)$.

4) Если $a \in (1/4; 1)$, то $x \in (a; 1)$.

№ 24. Решите неравенство $\log_{1/a}(a^x - 2) \geqslant x - 2$.

Решение.

ООН: $\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ a^x > 2. \end{cases}$ Решаем совокупность двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1, \\ a^x - 2 \geqslant a^2/a^x; \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} a > 1, \\ a^x - 2 \leqslant a^2/a^x, \\ a^x > 2. \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

(1): $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ a^{2x} - 2a^x - a^2 \geqslant 0, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 0 < a < 1, \\ a^x \geqslant 1 + \sqrt{1+a^2}, \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ x \leqslant \log_a(1 + \sqrt{1+a^2}). \end{cases} \quad (*)$$

(2): $\begin{cases} a > 1, \\ a^x > 2, \\ a^{2x} - 2a^x - a^2 \leqslant 0, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a > 1, \\ 2 < a^x \leqslant 1 + \sqrt{1+a^2}, \end{cases}$

$$\begin{cases} a > 1, \\ \log_a 2 < x \leqslant \log_a(1 + \sqrt{1+a^2}). \end{cases} \quad (**)$$

Заполним ось ответа (рис. 532).

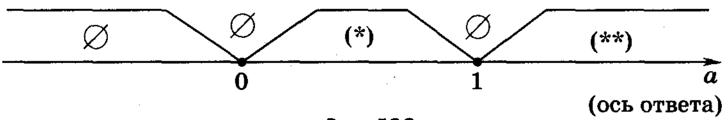


Рис. 532

Ответ: 1) Если $0 < a < 1$,

то $x \in (-\infty; \log_a(1 + \sqrt{1 + a^2})]$.

2) Если $a > 1$,

то $x \in (\log_a 2; \log_a(1 + \sqrt{1 + a^2})]$.

3) Если $a \leqslant 0$ или $a = 1$, то решений нет.

№ 25. При $a > 1$ решите неравенство

$\log_a(2x^2 - 4x + 2 + a^{x^2 - 2x + 5}) \leqslant 4$.

Решение.

Рассмотрим неравенство-следствие

$$2x^2 - 4x + 2 + a^{x^2 - 2x + 5} \leqslant a^4:$$

$$2(x - 1)^2 + a^{(x-1)^2 + 4} - a^4 \leqslant 0,$$

$$2(x - 1)^2 + a^4(a^{(x-1)^2} - 1) \leqslant 0.$$

Если $a > 1$, то оба слагаемых левой части неравенства являются неотрицательными. Следовательно, неравенство выполняется только при $x = 1$. Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ — решение данного неравенства.

Ответ: $x = 1$ при любом $a > 1$.

№ 26. Решите неравенство $\log_{x+a} 2 < \log_x 4$, если $0 < a < 1/4$.

Решение.

$$\text{ООН:} \begin{cases} 0 < a < 1/4, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 1 - a. \end{cases}$$

Переходим к логарифмам по основанию 2:

$$\frac{1}{\log_2(x+a)} < \frac{2}{\log_2 x};\quad \frac{\log_2\dfrac{(x+a)^2}{x}}{\log_2(x+a)\cdot\log_2 x} > 0.$$

Возможны 4 случая.

$$1)\begin{cases}\log_2 x > 0,\\ \log_2(x+a) > 0,\\ \log_2\dfrac{(x+a)^2}{x} > 0,\end{cases}\qquad \begin{cases}x>1,\\ x+a>1,\\ \dfrac{(x+a)^2}{x} > 1,\end{cases}\qquad x>1.$$

$$2)\begin{cases}\log_2 x > 0,\\ \log_2(x+a) < 0,\\ \log_2\dfrac{(x+a)^2}{x} < 0,\end{cases}\qquad \begin{cases}x>1,\\ x+a<1,\\ \dfrac{(x+a)^2}{x} < 1.\end{cases}$$

Система несовместна.

$$3)\begin{cases}\log_2 x < 0,\\ \log_2(x+a) < 0,\\ \log_2\dfrac{(x+a)^2}{x} > 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x<1,\\ x+a<1,\\ \dfrac{(x+a)^2}{x} > 1.\end{cases}$$

Учтем, что $x > 0$. Получим

$$\left[\begin{array}{l}0 < x < (1-2a-\sqrt{1-4a})/2,\\ (1-2a+\sqrt{1-4a})/2 < x < 1-a.\end{array}\right.$$

$$4)\begin{cases}\log_2 x < 0,\\ \log_2(x+a) > 0,\\ \log_2\dfrac{(x+a)^2}{x} < 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x<1,\\ x+a>1,\\ \dfrac{(x+a)^2}{x} < 1.\end{cases}$$

Эта система несовместна, так как

$(1-2a+\sqrt{1-4a})/2 < 1-a.$

Ответ: $x \in (0; (1-2a-\sqrt{1-4a})/2) \cup$
$\cup\ ((1-2a+\sqrt{1-4a})/2; 1-a) \cup (1; +\infty)$.

№ 27. Решите неравенство

$|x-a|\log_2((a-1)x-2) \geqslant x-a.$

Решение.

Раскрыв модуль, рассмотрим ряд случаев.

1) Пусть $x = a$: $0 \cdot \log_2(a^2 - a - 2) \geqslant 0$, $a^2 - a - 2 > 0$, $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ (ось (1) рис. 536).

2) $x > a$: $\begin{cases} x > a, \\ \log_2((a-1)x - 2) \geqslant 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > a, \\ (a-1)x - 2 \geqslant 2, \end{cases}$

$\begin{cases} x > a, \\ (a-1)x \geqslant 4. \end{cases}$

а) $a = 1$: решений нет.

б) $a > 1$: $\begin{cases} x > a, \\ x \geqslant \dfrac{4}{a-1}. \end{cases}$ Приравняем правые части неравенств:

$$\frac{4}{a-1} = a;\ a^2 - a - 4 = 0;\ a_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2};\ a_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

Число $\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ делит множество чисел $(1; +\infty)$ на два подмножества (рис. 533):

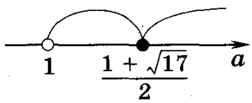


Рис. 533

1) $1 < a < \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$: $x \geqslant \dfrac{4}{a-1}$.

2) $a \geqslant \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$: $x > a$.

в) $a < 1$: $\begin{cases} x > a, \\ x \leqslant \dfrac{4}{a-1}. \end{cases}$

Если $a \in \left[\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}; 1\right)$, то решений нет (рис. 534).

Если $a \in \left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$, то $a < x \leqslant \dfrac{4}{a-1}$ (рис. 534).

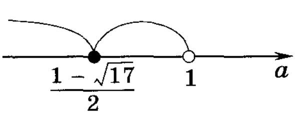


Рис. 534

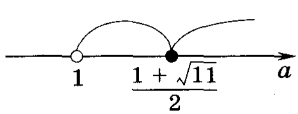


Рис. 535

Отметим множества решений на оси (2) рис. 536.

3) $x < a$: $\begin{cases} x < a, \\ \log_2((a-1)x-2) \geqslant -1; \end{cases}$

$\begin{cases} x < a, \\ (a-1)x - 2 \geqslant 1/2, \end{cases}$ $\begin{cases} x < a, \\ (a-1)x \geqslant 2{,}5. \end{cases}$

а) $a = 1$: решений нет.

б) $a > 1$: $\begin{cases} x < a, \\ x \geqslant \dfrac{2{,}5}{a-1}. \end{cases}$ Приравняем правые части неравенств:

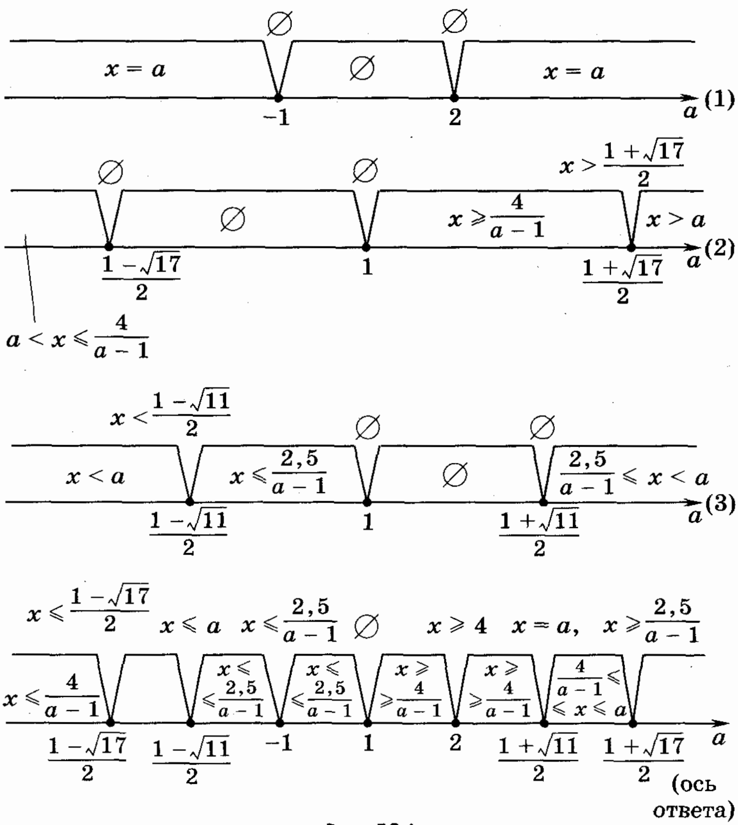


Рис. 536

$a = \dfrac{2,5}{a-1}$, $2a^2 - 2a - 5 = 0$,

$a_1 = \dfrac{1-\sqrt{11}}{2}$; $a_2 = \dfrac{1+\sqrt{11}}{2}$.

1) Если $1 < a \leqslant \dfrac{1+\sqrt{11}}{2}$, то решений нет.

2) Если $a > \dfrac{1+\sqrt{11}}{2}$, то $\dfrac{2,5}{a-1} \leqslant x < a$.

в) $a < 1$: $\begin{cases} x < a, \\ x \leqslant \dfrac{2,5}{a-1}. \end{cases}$

1) Если $a \leqslant \dfrac{1-\sqrt{11}}{2}$, то $x < a$.

2) Если $\dfrac{1-\sqrt{11}}{2} < a < 1$, то $x \leqslant \dfrac{2,5}{a-1}$.

Заполним ось (3) рис. 536.

Объединив соответствующие множества значений x, получим ответ (ось ответа рис. 536).

Ответ: 1) Если $a < \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$, то $x \leqslant \dfrac{4}{a-1}$.

2) Если $\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{1-\sqrt{11}}{2}$, то $x \leqslant a$.

3) Если $\dfrac{1-\sqrt{11}}{2} < a < -1$, то $x \leqslant \dfrac{2,5}{a-1}$ и $x = a$.

4) Если $-1 \leqslant a < 1$, то $x \leqslant \dfrac{2,5}{a-1}$.

5) Если $a = 1$, то решений нет.

6) Если $1 < a \leqslant 2$, то $x \geqslant \dfrac{4}{a-1}$.

7) Если $2 < a \leqslant \dfrac{1+\sqrt{11}}{2}$, то $x = a$ и $x \geqslant \dfrac{4}{a-1}$.

8) Если $\dfrac{1+\sqrt{11}}{2} < a < \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$,

то $\dfrac{4}{a-1} \leqslant x \leqslant a$.

9) Если $a \geqslant \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$, то $x \geqslant \dfrac{2,5}{a-1}$.

№ 28. При каких a для всех $x \in [2; 5/2]$ выполняется неравенство $\log_{|x-a|}(x^2+ax) \leqslant 2$?

Решение.

Рассматриваем совокупность систем неравенств, равносильную данному неравенству:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases} x^2+ax>0, \\ x^2+ax \leqslant (x-a)^2, \\ |x-a|>1; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x^2+ax \geqslant (x-a)^2, \\ 0<|x-a|<1. \end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Обратимся сначала к системе (1). Решая ее, будем учитывать, что $x \in [2; 5/2]$. $\begin{cases} x>-a, \\ \left[\begin{array}{l} x>a+1, \\ x<a-1, \end{array}\right. \\ 3ax \leqslant a^2. \end{cases}$ Решаем графически в системе координат (aOx).

1) Пусть $a=0$: $\begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-1, \end{array}\right. \end{cases}$ $x>1$. Значит, при $a=0$ данное неравенство выполняется для всех $x \in [2; 5/2]$.

2) $a>0$. Неравенство справедливо при любом $x \in [2; 5/2]$, если $a \geqslant 15/2$ (рис. 537).

3) $a<0$. Подходят значения $a \in (-2; 0]$.

Решаем систему (2): $\begin{cases} 3ax \geqslant a^2, \\ 0<|x-a|<1; \end{cases}$

$\begin{cases} 3ax \geqslant a^2, \\ x \neq a, \\ a-1<x<a+1. \end{cases}$ Решаем графически (рис. 538).

1) $a>0$: $\begin{cases} x \geqslant a/3, \\ x \neq a, \\ a-1<x<a+1. \end{cases}$ $a+1=2{,}5$: $a=1{,}5$. $a-1=2$: $a=3$.

Из рис. 538 видно, что система (2) выполняется при любых $x \in [2; 2{,}5]$, если $a \in (3/2; 2) \cup (5/2; 3)$.

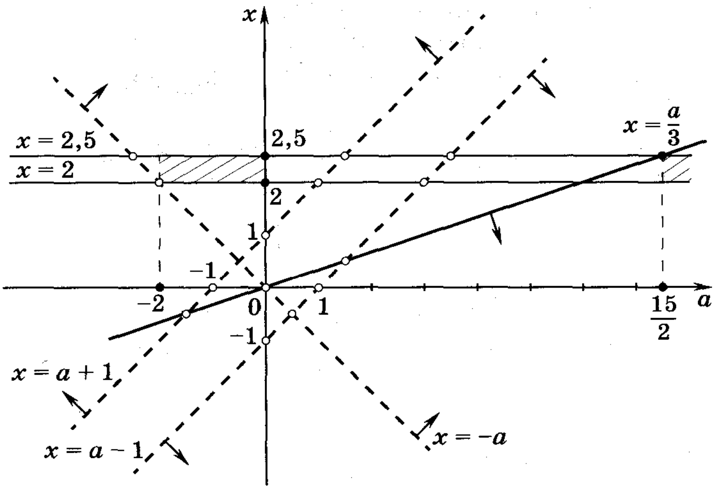


Рис. 537

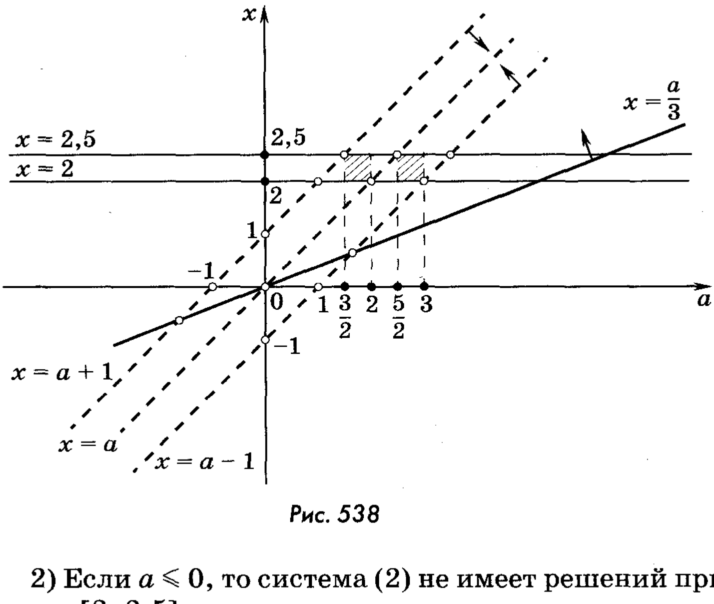


Рис. 538

2) Если $a \leqslant 0$, то система (2) не имеет решений при $x \in [2; 2{,}5]$.

Ответ: $a \in (-2; 0] \cup (3/2; 2) \cup (5/2; 3) \cup [15/2; +\infty)$.

№ 29. Найдите в интервале $(1; +\infty)$ подмножество тех x, для которых справедливо неравенство
$\lg(3\log_a x - \log_a^2 x + 4) > \lg(8 - 2\log_a x)$.

Решение.

Сначала решим систему $\begin{cases} 3t - t^2 + 4 > 8 - 2t, \\ 8 - 2t > 0, \end{cases}$ где

$t = \log_a x$: $\begin{cases} t^2 - 5t + 4 < 0, \\ t < 4, \end{cases}$ $\begin{cases} 1 < t < 4, \\ t < 4, \end{cases}$ $1 < t < 4$,
$1 < \log_a x < 4$.

1) Если $0 < a < 1$, то $x \in (a^4; a)$. Но интервал $(a^4; a)$ не является подмножеством интервала $(1; +\infty)$.

2) Пусть $a > 1$: $a < x < a^4$. Видим, что
$(a; a^4) \subset (1; +\infty)$.

Ответ: 1) Если $a > 1$, то $x \in (a; a^4)$.
2) Если $a \leqslant 1$, то искомое множество пусто.

№ 30. Для каждого допустимого значения параметра a решите неравенство
$\log_{2\cos a}(x + 4) \geqslant 2\log_{2\cos a}(x + 2)$.
(ЕГЭ 2002 г.)

Решение.

ООН: $\begin{cases} \cos a > 0, \\ \cos a \neq 1/2, \\ x > -2. \end{cases}$

Отметим допустимые значения a на единичной окружности (рис. 539).

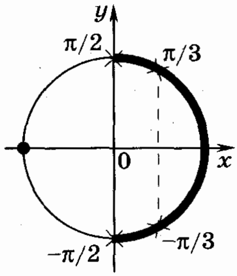


Рис. 539

Данное неравенство сначала представим в виде
$\log_{2\cos a}(x + 4) \geqslant \log_{2\cos a}(x + 2)^2$,
а затем переходим к совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \in (-\pi/3 + 2\pi k; \pi/3 + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}, \\ x + 4 \geqslant (x + 2)^2, \\ x > -2, \end{cases} \\ \begin{cases} a \in (-\pi/2 + 2\pi n; -\pi/3 + 2\pi n) \cup \\ \cup\ (\pi/3 + 2\pi m; \pi/2 + 2\pi m),\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}, \\ x + 4 \leqslant (x + 2)^2, \\ x > -2, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a \in (-\pi/3 + 2\pi k;\ \pi/3 + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}, \\ x^2 + 4x \leqslant 0, \\ x > -2, \end{cases} \\ \begin{cases} a \in (-\pi/2 + 2\pi n;\ -\pi/3 + 2\pi n)\ \cup \\ \cup\ (\pi/3 + 2\pi m;\ \pi/2 + 2\pi m),\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}, \\ x^2 + 4x \geqslant 0, \\ x > -2, \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a \in (-\pi/3 + 2\pi k;\ \pi/3 + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}, \\ -2 < x \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a \in (-\pi/2 + 2\pi n;\ -\pi/3 + 2\pi n)\ \cup \\ \cup\ (\pi/3 + 2\pi m;\ \pi/2 + 2\pi m),\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}, \\ x \geqslant 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: 1) Если $a \in (-\pi/3 + 2\pi k;\ \pi/3 + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, то $x \in (-2;\ 0]$.
2) Если $a \in (-\pi/2 + 2\pi n;\ -\pi/3 + 2\pi n) \cup (\pi/3 + 2\pi m;\ \pi/2 + 2\pi m)$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, то $x \in [0;\ +\infty)$.

№ 31. Найдите все значения a, при которых область определений функции $y = \log_{100}\left(a^{x+1} \cdot x^{4\log_x a} + a^{4 + 5\log_a x} - (\sqrt{x})^{10 + 2x\log_x a} - \sqrt{a^{18}}\right)$ содержит ровно три целых числа. (ЕГЭ 2003 г.)

Решение.

Область определения данной функции совпадает с множеством решений неравенства $a^{x+1} \cdot x^{4\log_x a} + a^{4 + 5\log_a x} - (\sqrt{x})^{10 + 2x\log_x a} - \sqrt{a^{18}} > 0$.

ООН: $\begin{cases} a > 0,\ a \neq 1, \\ x > 0,\ x \neq 1. \end{cases}$

$a^{x+1} \cdot a^4 + a^4 \cdot a^{5\log_a x} - x^5 \cdot x^{x\log_x a} - a^9 > 0,$

$a^x \cdot a^5 + a^4 \cdot x^5 - x^5 \cdot a^x - a^9 > 0,$

$a^5(a^x - a^4) - x^5(a^x - a^4) > 0,$

$(a^5 - x^5) \cdot (a^x - a^4) > 0,$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a^x - a^4 > 0, \\ a^5 - x^5 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a^x - a^4 < 0, \\ a^5 - x^5 < 0, \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a^x > a^4, \\ x^5 < a^5, \end{cases} \\ \begin{cases} a^x < a^4, \\ x^5 > a^5. \end{cases}\end{array}\right.$$

1) Сначала решим совокупность систем при $a > 1$ и учитывая ООН.

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a > 1,\\ x > 4,\\ x < a,\\ x > 0,\ x \neq 1,\end{array}\right. \quad (1)\\ \left\{\begin{array}{l}a > 1,\\ x < 4,\\ x > a,\\ x > 0,\ x \neq 1.\end{array}\right. \quad (2)\end{array}\right.$$

Начинаем с системы (1): $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}1 < a \leqslant 4,\\ x > 4,\\ x < a,\\ x > 0,\ x \neq 1,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a > 4,\\ x > 4,\\ x < a,\\ x > 0,\ x \neq 1.\end{array}\right.\end{array}\right.$

Первая система последней совокупности решений не имеет. Если же $a > 4$, то $4 < x < a$.

Решаем систему (2): $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}1 < a < 4,\\ x < 4,\\ x > a,\\ x > 0,\ x \neq 1,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a \geqslant 4,\\ x < 4,\\ x > a,\\ x > 0,\ x \neq 1,\end{array}\right.\end{array}\right.$ $\quad \left\{\begin{array}{l}1 < a < 4,\\ a < x < 4.\end{array}\right.$

2) Пусть $0 < a < 1$:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}0 < a < 1,\\ x < 4,\\ x < a,\\ x > 0,\ x \neq 1,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}0 < a < 1,\\ x > 4,\\ x > a,\\ x > 0,\ x \neq 1,\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}0 < a < 1,\\ \left[\begin{array}{l}0 < x < a,\\ x > 4.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Отметим множества решений на оси параметра (рис. 540).

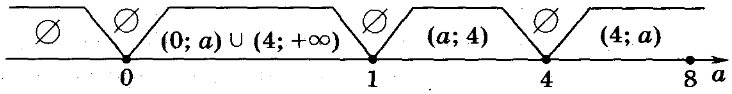


Рис. 540

Анализ множества решений (см. рис. 540) показывает, что условию задания удовлетворяет только $a = 8$.

Ответ: 8.

Упражнения для самостоятельного решения

Решите неравенства (1—13):

1) $\log_2 (ax) > 0$.
2) $\log_{a-4} \dfrac{ax-1}{a-1} \geqslant 0$.
3) $\log_{1/3} (x + a - 5) + \log_3 (x - 2a + 1) \leqslant -2$.
4) $\lg (bx^2) \leqslant \lg (2bx - 4)$.
5) $\log_a x + \log_a (x - 2) > 1$.
6) $\log_a (1 - x^2) \geqslant 1$.
7) $\log_a (1 - 8a^{-x}) \geqslant 2(1 - x)$.
8) $\log_a x - \log_x a \geqslant 3/2$.
9) $\lg (bx + 1) + \dfrac{4}{\lg(bx + 1)} < 2 \lg 100$.
10) $x^{\log_a x} \geqslant a$.
11) $\log_{ax} 2 > 0$.
12) $\log_{ax-1} x < 0$.
13) $\log_{p-x+1} (x^2 - 2px) \leqslant 2$.
14) При каких значениях параметра a неравенство $\log_{a/(a+1)} (x^2 + 2) > 1$ выполняется для любого $x \in \mathrm{R}$?

15) При каких значениях параметра a неравенство $\log_2(3x+a)<1$ не имеет решений? (Решите аналитически.)

16) Найдите все такие значения m, при которых для любого $x<0$ выполняется неравенство $\log_2(x^2+mx+1)>-1$.

17) Для каждого допустимого значения параметра a решите неравенство

$$2\log_{\sqrt{3}\operatorname{tg} a}(x-4)\leqslant \log_{\sqrt{3}\operatorname{tg} a}(2x+7).$$

(ЕГЭ 2002 г.)

18) Найдите все положительные, не равные 1, значения a, при которых область определения функции

$$y=\left(a^{x+3}\cdot a^2+a^{4+5\log_a x}-x^{5+x\log_x a}-\left(\sqrt[3]{a}\right)^{27}\right)^{0,5}$$

не содержит двузначных натуральных чисел. (ЕГЭ 2003 г.)

19) Найдите все значения a, при которых область определения функции

$$y=\ln\left(x^{(x+5)\log_x a}+\left(\sqrt{x}\right)^{10}\cdot a^4-\right.$$
$$\left.-x^{5+x\log_x a}-\left(a^6\right)^{\log_4 8}\right)$$

содержит ровно два целых числа. (ЕГЭ 2003 г.)

Литература

1. *Амелькин В. В., Рабцевич В. Л.* Задачи с параметрами. Справочные материалы. — Минск: Асар, 1996.
2. *Буданцев П. А., Щипакин Г. М.* Квадратные и иррациональные уравнения. — М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1956.
3. *Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С.* Задачи с параметрами. — Киев: РИА «Текст», МП «ОКО», 1992.
4. *Гусев В. А., Мордкович А. Г.* Математика. Справочные материалы. — М.: Просвещение, 1988.
5. *Звавич Л. И.* и др. Алгебра и начала анализа 8—11 кл. Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики. — М.: Дрофа, 1999.
6. *Звавич Л. И., Шляпочник Л. Я., Чинкина М. В.* 3600 задач для школьников и поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 1999.
7. *Зив Б. Г.* Задачи по алгебре и началам анализа. — СПб.: Мир и семья-95, 1997.
8. *Карп А. П.* Сборник задач по алгебре и началам анализа. — М.: Просвещение, 1995.
9. *Крейнин Я. Л.* Функции, пределы, уравнения и неравенства с параметрами. Теория и решение задач. Книга для учащихся. — М.: Просвещение, 1995.

10. *Крейнин Я. Л.* Функции. Пределы. Уравнения и неравенства с параметрами. — М.: Просвещение, 1995.

11. *Куланин Н.Д.* и др. 3000 конкурсных задач по математике. — М.: Айрис-пресс, 2003.

12. *Макаров В. К.* Задачи с параметрами. (Пособие для поступающих в Московский университет.) — М.: МГУ, 1968.

13. Математический энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия, 1988.

14. *Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.* Алгебраический тренажер. Пособие для школьников и абитуриентов. — М. — Харьков: «ИЛЕКСА», «Гимназия», 1998.

15. *Потапов М. К., Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В.* Конкурсные задачи по математике. — М.: Наука, 1992.

16. *Фрид Э.* и др. Малая математическая энциклопедия. — Будапешт: Академия наук Венгрии, 1976.

17. *Черкасов О. Ю., Якушев А. Г.* Математика. Методические указания для поступающих в вузы. — М.: МГУ, 1996.

18. *Ястребинецкий Г. Я.* Задачи с параметрами: Книга для учителя. — М.: Просвещение, 1986.

Содержание

Учебное издание

Серия «Выпускной/вступительный экзамен»

Беляева Эмма Степановна
Потапов Александр Сергеевич
Титоренко Светлана Алексеевна

МАТЕМАТИКА. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

В двух частях. Часть 2

Учебное пособие

Зав. редакцией *Т. Д. Гамбурцева*
Ответственный редактор *Г. А. Лонцова*
Художественный редактор *А. В. Пряхин*
Технический редактор *И. В. Грибкова*
Компьютерная верстка *А. В. Маркин*
Корректор *Г. И. Мосякина*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.010105.09.08 от 22.09.2008.
Подписано к печати 06.10.08. Формат 84×108 $^{1}/_{32}$.
Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25,2. Тираж 3000 экз. Заказ № 5664.
ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги просим направлять в редакцию общего образования издательства «Дрофа»: 127018, Москва, а/я 79. Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу: 127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник». 109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А. Тел.: (495) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Сеть магазинов «Переплетные птицы». Тел.: (495) 912-45-76.

Интернет-магазин: http://www.drofa.ru

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Можайский полиграфический комбинат».
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.

Э. С. Беляева, А. С. Потапов, С. А. Титоренко

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

Часть 2

Тема «Уравнения и неравенства с параметром» отсутствует в школьной программе, но имеется в программах вступительных экзаменов в вузы и в материалах ЕГЭ по математике. Данный учебный комплект раскрывает эту тему в полном объеме и состоит из учебного пособия в двух частях и электронного приложения.

Каждый раздел пособия содержит необходимые теоретические сведения. Детально рассмотрен широкий спектр задач разных уровней сложности, доступно и наглядно изложена методика их решения. Комплект станет незаменимым помощником для старшеклассников, абитуриентов, преподавателей математики, а также для студентов математических специальностей.

Пособия этой серии помогут вам:

- провести глубокую теоретическую и практическую подготовку к единому государственному экзамену;
- самостоятельно разобраться в сложных вопросах, не прибегая к помощи репетитора.

дрофа

ISBN 978-5-358-02063-4

9 785358 020634